การลู่เข้าของกระบวนการทำซ้ำเพื่อหาผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพแบบ แยกอสมการการแปรผัน และปัญหาจุดตรึงของการส่งแบบหลายค่าในปริภูมิฮิลเบิร์ต

On the Convergence of Iteration of Common Solutions for a Split Equilibrium Problem Variation Inequality and Fixed Point Problems of Multi-Valued Mappings in Hilbert Spaces

ณวิชชา อ่อนใจเอื้อ

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏนครปฐม
nawitcha@hotmail.com

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ ได้เสนอและศึกษากระบวนการทำซ้ำเพื่อที่จะหาผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพแบบแยก ปัญหาอสมการการแปรผัน และปัญหาจุดตรึงของการส่งหลายค่าในปริภูมิฮิลเบิร์ต และได้ศึกษาการลู่เข้าแบบอ่อนของลำดับที่ได้สร้างจากกระบวนการทำซ้ำ ไปสู่ผลเฉลยร่วมของทั้งสามปัญหาข้างต้น

คำสำคัญ: กระบวนการทำซ้ำ ปัญหาดุลยภาพแบบ split อสมการการแปรผัน ปัญหาจุดตรึง

Abstract

In this paper, we introduce and study iteration for solving split equilibrium problems, variation inequality and fixed point problems of multivalued mappings in Hilbert spaces and prove that the proposed iterative algorithm converges weakly to a common solution of the considered problems

Keywords: iteration, split equilibrium problems, variation inequality, fixed point problems

1. บทนำ

การศึกษาเกี่ยวกับปัญหาดุลยภาพ (Equilibrium Problems) ถือได้ว่าเป็นปัญหาที่สำคัญในด้านเศรษฐศาสตร์ วิทยาศาสตร์ หรือแม้กระทั่งในทางวิศวกรรมศาสตร์ก็ตาม โดยปัญหาดุลยภาพเป็นการศึกษาปัญหา ดังต่อไปนี้ กำหนดให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตจริง กับ ผลคูณภายใน $\langle \cdot, \cdot \rangle$ และ induced norm $\|\cdot\|$ กำหนดให้ C เป็นเซตย่อยคอนเวกซ์แบบปิด ที่ไม่เป็นเซตว่าง ของปริภูมิฮิลเบิร์ตจริง และให้ $F: C \times C \to \mathbb{R}$ เป็นการส่งฟังก์ชันคู่ ผลเฉลยของปัญหาดุลยภาพก็คือการหาสมาชิก $x \in C$ ที่สอดคล้องกับอสมการต่อไปนี้

$$F(x, y) \geq 0, \forall y \in C$$

ในปี 2005 Censor และ Elfving (2005) เป็นนักวิจัยกลุ่มแรกที่ได้ศึกษาปัญหาที่เรียกว่า split feasibility problem (SEP) ในปริภูมิฮิลเบิร์ตที่มีมิติจำกัด โดยกำหนดให้ C และ Q เป็นเซตย่อยคอนเวกซ์แบบปิด ที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต H_1 และ H_2 ตามลำดับ ให้ $A: H_1 \to H_2$ เป็นการส่งเชิงเส้นแบบมีขอบเขต แล้วผลเฉลยของปัญหา split feasibility problem (SEP) คือการหาสมาชิก x^* ที่สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

$$x^* \in C, Ax^* \in Q$$

ผลเฉลยของปัญหา split feasibility problem สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหา เรื่อง intensity-modulated radiation therapy, signal processing และ image reconstruction (Censor et al., 2005)

ต่อมาในปี 2013 Kazmi และคณะ (2013) ได้นำปัญหาดุลยภาพ และ split feasibility problem นำมาประยุกต์รวมกัน กลายเป็นปัญหาที่เรียกว่า ปัญหาดุลยภาพแบบแยก (split equilibrium Problem) นั่นคือ: กำหนดให้ $F_1: C \times C \to \mathbb{R}$ และ $F_2: Q \times Q \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันคู่แบบไม่เชิงเส้น และให้ $A: H_1 \to H_2$ เป็นการส่งเชิงเส้นที่มีขอบเขต แล้วการหาผลเฉลยปัญหาดุลยภาพแบบแยก คือ การหาสมาชิก $x^* \in C$ ที่สอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

$F_1(x^*, x) \geq 0, \forall x \in C$ โดยที่ $y^* = Ax^* \in Q$ และ y^* สอดคล้องกับอสมการ $F_2(y^*, y) \geq 0, \forall y \in Q$

ต่อไปจะพิจารณาปัญหาที่เรียกว่าปัญหาอสมการแปรผัน (variational inequality problems) โดยเริ่มจากกำหนดให้ $B: C \to H$ เป็นการส่งที่เรียกว่า การส่งทางเดียวแบบเข้มผกผัน ถ้า B สอดคล้องกับอสมการต่อไปนี้

$$\langle x - y, Bx - By \rangle \geq \delta \|Bx - By\|^2, \forall x, y \in C, \; \delta \in \mathbb{R}^+$$

ผลเฉลยของคำตอบของปัญหาอสมการแปรผัน (เขียนแทนด้วย $VI(C, B)$) สำหรับการส่งทางเดียวแบบเข้มผกผัน B หมายความคือ สมาชิก $u \in C$ ที่สอดคล้องกับอสมการดังนี้

$$\langle v - u, Bu \rangle \geq 0 \text{ สำหรับทุกๆ } v \in C$$

การศึกษาเกี่ยวกับปัญหาอสมการการแปรผัน ได้เข้ามามีบทบาทสำคัญอย่างมาก เนื่องจากองค์ความรู้ที่ได้จากการศึกษาทฤษฎีอสมการการแปรผันนั้นเป็นแบบจำลองพื้นฐานและเครื่องมือที่สำคัญในการศึกษาเกี่ยวกับทั้งปัญหาเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น ซึ่งปัญหาทั้งสองถือเป็นปัญหาหลักในการศึกษาทั้งในแง่ของวิทยาศาสตร์บริสุทธิ์ และวิทยาศาสตร์ประยุกต์เช่น nonlinear programming, optimization และ control, physics, economics, transportation equilibrium, physical และ engineering sciences เป็นต้น

การที่ศึกษาเพื่อหาผลเฉลยร่วมของปัญหาปัญหาดุลยภาพแบบแยก และอสมการการแปรผันนั้น นักวิจัยส่วนใหญ่ใช้วิธีการสร้างกระบวนการทำซ้ำของจุดตรึง (fixed point) สำหรับการส่งไม่เชิงเส้น มาประยุกต์ในการแก้ปัญหา ซึ่งทฤษฎีจุดตรึง (fixed point theory) ในปัจจุบันนี้ นับว่ามีบทบาทสำคัญอย่างมาก ต่อการพัฒนา ความรู้เกี่ยวกับวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีสมัยใหม่และนำไปประยุกต์เพื่อแก้ปัญหาต่าง ๆ วิธีการสร้างกระบวนการทำซ้ำได้มีการพัฒนามาอย่างต่อเนื่อง จนทำให้มีกระบวนการทำซ้ำในแบบต่างๆ เช่น กระบวนการทำซ้ำแบบ Picard (1922) , Mann (1953) และ Ishikawa (1974) เป็นต้น โดยค่าที่ได้จากการกระบวนการทำซ้ำ จะลู่เข้าไปหาผลเฉลยของปัญหาที่ต้องการ

ในงานวิจัยนี้ได้สร้างกระบวนการทำซ้ำแบบใหม่ ซึ่งนำกระบวนการทำซ้ำแบบ Ishikawa มาปรับปรุง ได้ดังต่อไปนี้ ให้ $x_1 \in C$ และ

$$\begin{aligned}
u_n &= T_{r_n}^{F_1}(I-\gamma A^*(I-T_{r_n}^{F_2})A)x_n,\\
v_n &= P_{C_1}(I-\delta_n B)u_n,\\
y_n &= \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)w_n,\ w_n \in Sv_n,\\
x_{n+1} &= \beta_n x_n + (1-\beta_n)z_n,\ z_n \in Sy_n, \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

2. วัตถุประสงค์ในการวิจัย

2.1 เพื่อศึกษาการลู่เข้าอย่างอ่อนของลำดับที่สร้างจากกระบวนการทำซ้ำแบบ (1) บนปริภูมิฮิลเบิร์ต

2.2 เพื่อหาผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลภาพแบบแยก ปัญหาอสมการแปรผัน และปัญหาจุดตรึงสำหรับการส่งแบบหลายค่าบนปริภูมิฮิลเบิร์ต

3. เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

กำหนดให้ $CB(C)$ เป็นวงศ์ของเซตย่อยมีขอบเขตแบบปิดที่ไม่เป็นเซตว่างของ C และ $K(C)$ เป็นเซตย่อยกระชับที่ไม่เป็นเซตว่างของ C และระยะทางของเฮาส์ดอฟฟ์ (The Hausdorff metric (H)) บนเซต $CB(C)$ นิยามโดย

$$\mathrm{H}(A,B) := \max\{\sup_{x\in A} dist(x,B), \sup_{y\in B} dist(y,A)\},\ \forall A,B \in CB(C)$$

กำหนดให้ การส่ง $S: C \to 2^C$ เป็นการส่งหลายค่า จะกล่าวว่า $x \in C$ เป็นจุดตรึงของเซต S ถ้า $x \in Sx$

บทนิยามที่ 3.1 กำหนดให้ $S: C \to 2^C$ เป็นการส่งหลายค่า จะกล่าวว่า S เป็น

(i) การส่งแบบไม่ขยาย ถ้าสอดคล้องกับอสมการต่อไปนี้

$$\mathrm{H}(Sx,Sy) \le \| x-y \|,\ x,y \in C$$

(ii) การส่งแบบ nonspreading ถ้าสอดคล้องกับอสมการต่อไปนี้

$$2\mathrm{H}(Sx,Sy)^2 \le dist(y,Sx)^2 + dist(x,Sy)^2,\ \forall x,y \in C$$

(iii) การส่งแบบดัดแปลงสำหรับค่า λ ถ้ามี $\lambda \in \mathbb{R}$ และสอดคล้องกับอสมการต่อไปนี้

$$(1+\lambda)\mathrm{H}(Sx,Sy)^2 \le (1-\lambda)\| x-y \|^2 + \lambda dist(y,Sx)^2 + \lambda dist(x,Sy)^2,\ \forall x,y \in C$$

จะเห็นว่า การส่งแบบดัดแปลงสำหรับค่า 0 ก็คือการส่งแบบไม่ขยาย และการส่งแบบดัดแปลงสำหรับค่า 1 คือการส่งแบบ nonspreading เนื่องจากงานวิจัยทำให้ทราบว่าถ้า S เป็นการส่งแบบดัดแปลง สำหรับค่า λ แล้วเซต $F(S)$ เป็นเซตปิด นอกจากนี้ถ้าการส่ง S ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขว่า $Sp = \{p\}, \forall p \in F(S)$ แล้ว $F(S)$ เป็นเซตคอนเวกซ์

บทตั้งที่ 3.2 (Takahashi et al., 2005) กำหนดให้ H_1 เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต แล้วจะมีสมบัติต่อไปนี้

3.2.1 $\| x-y \|^2 \le \| x \|^2 - \| y \|^2 - 2\langle x-y, y\rangle,\ \forall x,y \in H_1;$

3.2.2 $\| x+y \|^2 \le \| x \|^2 + 2\langle y, x+y\rangle,\ \forall x,y \in H_1;$

3.2.3 $\| tx+(1-t)y \|^2 = t\| x \|^2 + (1-t)\| y \|^2 - t(1-t)\| x-y \|^2,\ \forall t \in [0,1]\ \forall x,y \in H_1;$

3.2.4 ถ้าลำดับ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in H_1$ เป็นลำดับที่ลู่เข้าแบบอ่อน ไปสู่ค่า $z \in H_1,$ แล้วจะได้ว่า

$$\limsup_{n\to\infty} \| x_n - y \|^2 = \limsup_{n\to\infty} \left(\| x_n - z \|^2 + \| z-y \|^2 \right),\ \forall y \in H_1$$

และสำหรับค่า ของ $\gamma \in (0, 2\delta]$ จะเห็นว่าการส่ง $I-\gamma T$ เป็นการส่งแบบไม่ขยายค่าเดียว นั่นคือ

$$\|(I-\gamma T)x - (I-\gamma T)y\| \le \|x-y\|,\ \forall x,y \in C$$

กำหนดให้ C เป็นเซตย่อยคอนเวกซ์แบบปิดที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ตจริง H_1 สำหรับ $x \in H_1$ จะมีจุดที่ใกล้ เซต C มากที่สุดเพียงจุดเดียวเท่านั้น เขียนแทนด้วย $P_C(x)$ ที่ซึ่ง $\|x - P_C x\| \le \|x - y\|,$ เมื่อ $y \in C$ และ P_C จะเรียกว่า metric projection เซต $H_1 \to C$ ซึ่ง $P_C(x)$ เป็นการส่งไม่ขยายแบบ firmly เซต $H_1 \to C$

$$\|P_C(x) - P_C(y)\| \le \langle P_C(x) - P_C(y), x - y \rangle \text{ สำหรับทุกๆ } x, y \in H_1$$

นอกจากนี้ สำหรับทุก ๆ $x \in H_1$, $y \in C$ และ $z = P_C(x)$ ก็ต่อเมื่อ $\langle x - z, z - y \rangle \ge 0$

บทตั้งที่ 3.3 (Opial, 1967) ให้ E เป็นปริภูมิบานาค จะกล่าวว่า E สอดคล้องเงื่อนไข opial ถ้าลำดับ $\{x_n\} \subseteq E$ และ $x_n \rightharpoonup x$ แล้ว $\limsup \| x_n - x \| < \limsup \|x_n - y\|,\ y \in E, x \ne y$

บทตั้งที่ 3.4 (Suantai, 2005) ให้ E เป็นปริภูมิบานาคสอดคล้องกับเงื่อนไข Opial และ $\{x_n\} \subseteq E$ ให้ $u, v \in E,\ \lim\limits_{n \to \infty} \| x_n - u \|$ และ $\lim\limits_{n \to \infty} \| x_n - v \|$ หาค่าได้ ถ้า $\{x_{n_k}\}, \{x_{m_k}\} \subseteq \{x_n\}$ ลู่เข้าอย่างอ่อนสู่ค่า u และ v ตามลำดับ แล้วจะได้ว่า $u = v$

สำหรับการหาผลเฉลยของปัญหาดุลยภาพ จำเป็นต้องตั้งสมมุติฐานโดย ให้ $F_1 : C \times C \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันคู่ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

3.4.1 $F_1(x, x) = 0$ สำหรับ $x \in C;$

3.4.2 F_1 เป็นการส่งแบบทางเดียว นั่นคือ $F_1(x, y) + F_1(y, x) \le 0 \,\forall x, y \in C;$

3.4.3 สำหรับ $x, y, z \in C,$ จะได้ว่า $\lim\limits_{t \to 0} F_1(tz + (1-t)x, y) \le F_1(x, y);$

3.4.4 สำหรับ $x \in C, y \mapsto F_1(x, y)$ เป็นการส่งคอนเวกซ์ และการส่งกึ่งต่อเนื่องล่าง และ

$$F_1(z, y_x)\frac{1}{r}\langle y_x - z, z - x \rangle < 0$$

บทตั้งที่ 3.5 (Suantai et al., 2016) ให้ C เป็นเซตย่อยคอนเวกซ์แบบปิดที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ตจริง H_1 และ $F_1 : C \times C \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันคู่สอดคล้องกับเงื่อนไข 3.4.1-3.4.4 สำหรับ $r > 0$ และ $x \in H_1$ และนิยามโดย

$T_r^{F_1} : H_1 \to C$ โดย $T_r^{F_1}(x) = \left\{ z \in C : F_1(z, y) + \frac{1}{r}\langle y - z, z - x \rangle \ge 0,\ \forall y \in C \right\}, \forall x \in H_1$ จึงสรุปได้ว่า

3.5.1 สำหรับสมาชิก $\forall x \in H_1,\ T_r^{F_1} \ne \varnothing$

3.5.2 $T_r^{F_1}$ เป็นการส่งแบบค่าเดียว

3.5.3 $T_r^{F_1}$ เป็นการส่งไม่ขยายแบบ firmly นั่นคือ $\| T_r^{F_1}x - T_r^{F_1}y \|^2 \le \langle T_r^{F_1}x - T_r^{F_1}y, x - y \rangle, \forall x, y \in H_1$

3.5.4 $F(T_r^{F_1}) = EP(F_1)$

3.5.5 $EP(F_1)$ เป็นคอนเวกซ์แบบปิด

นอกจากนี้ให้ $F_2 : Q \times Q \to \mathbb{R}$ สอดคล้องกับสมมุติฐานสำหรับ $s > 0$ และ $w \in H_2$ นิยามการส่ง $T_s^{F_2} : H_2 \to Q$ โดย $T_s^{F_2}(v) = \left\{ w \in Q : F(w, d) + \frac{1}{r}\langle d - w, w - v \rangle \ge 0,\ \forall d \in Q \right\}$ จึงสรุปได้ว่า

3.5.6 สำหรับสมาชิก $\forall x \in H_2,\ T_s^{F_2} \ne \varnothing$

3.5.7 $T_s^{F_2}$ เป็นการส่งแบบค่าเดียว

3.5.8 $T_s^{F_2}$ เป็นการส่งไม่ขยายแบบ firmly นั่นคือ $\| T_s^{F_2}x - T_s^{F_2}y \|^2 \le \langle T_s^{F_2}x - T_s^{F_2}y, x - y \rangle, \forall x, y \in H_2$

3.5.9 $F(T_s^{F_2}) = EP(F_2)$

3.5.10 $EP(F_2)$ เป็นคอนเวกซ์แบบปิด

ข้อสังเกต กำหนดให้ปริภูมิฮิลเบิร์ตจริง H และ $C \subset H$ การส่งหลายค่า $S: C \to CB(C)$ จะกล่าวว่า การส่ง S สอดคล้องเงื่อนไข (A) ถ้า $\| x-p \| = d(x, Sp), x \in H$ และ $p \in F(S)$ จะเห็นว่า S สอดคล้องกับเงื่อนไข (A) ก็ต่อเมื่อ $Sp = \{p\}$ สำหรับ $p \in F(S)$ เป็นที่ทราบว่าการดำเนินการที่ประมาณค่าที่ดีที่สุด P_S โดยที่ $P_S x = \{y \in Sx : \| y-x \| = d(x, Sx)\}$ และสอดคล้องกับเงื่อนไข (A)

บทตั้งที่ 3.6 (Suantai et al., 2015) กำหนดให้ C เป็นเซตย่อยคอนเวกซ์แบบปิดที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ตจริง H และ $S: C \to K(C)$ เป็นการส่งหลายค่าดัดแปลงสำหรับค่า λ ถ้าลำดับ $\{x_n\} \subseteq C$ ที่ซึ่ง $x_n \rightharpoonup x$ และ $y_n \in Sx_n$ เมื่อ $x_n - y_n \to 0$ แล้ว $x \in Sx$

บทตั้งที่ 3.7 (Iiduka และ Takahashi, 2005) ถ้า $B: C \to H$ การส่งทางเดียวแบบเข้มผกผัน สำหรับค่า δ แล้ว $I - \delta B : C \to H$ เป็นการส่งแบบไม่ขยาย เมื่อ $\delta \in (0, 2a)$ นั่นคือ $u \in VI(C,B) \Leftrightarrow u = P_C(u - \delta Bu)$

4. ผลการวิจัย

ทฤษฎีบทที่ 4.1 กำหนดให้ C และ Q เป็นเซตย่อยคอนเวกซ์แบบปิดที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ตจริง H_1 และ H_2 ตามลำดับ ให้ $A: H_1 \to H_2$ เป็นการส่งเชิงเส้นแบบมีขอบเขต ให้ $B: C \to H_1$ การส่งทางเดียวแบบเข้มผกผันสำหรับค่า δ และ $S: C \to K(C)$ เป็นการส่งหลายค่าดัดแปลงสำหรับค่า λ กำหนดให้ $F_1 : C \times C \to \mathbb{R}$ และ $F_2 : Q \times Q \to \mathbb{R}$ เป็นการส่งแบบฟังก์ชันคู่ ที่สอดคล้องกับสมมุติฐานที่ 3.4.1-3.4.4 และ F_2 เป็นการส่งกึ่งต่อเนื่องบนอาร์กิวเมนต์ที่ 1 สมมุติให้การส่งหลายค่าดัดแปลง S สอดคล้องเงื่อนไข (A) และ $\Theta = F(S) \cap \Omega \cap VI(C,B) \neq \emptyset$ เมื่อ $\Omega = \{z \in C : z \in EP(F_1) \quad , Az \in EP(F_2)\}$ ให้ $x_1 \in C$ และ

$$\begin{aligned} u_n &= T_{r_n}^{F_1}(I - \gamma A^*(I - T_{r_n}^{F_2})A)x_n, \\ v_n &= P_{C_1}(I - \delta_n B)u_n, \\ y_n &= \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)w_n,\, w_n \in Sv_n, \\ x_{n+1} &= \beta_n x_n + (1-\beta_n)z_n,\, z_n \in Sy_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{1}$$

เมื่อ $\gamma \in (0, 1/L)$ ที่ซึ่ง L คือรัศมีสเปกตรัมของ A^*A โดยที่ A^* ผูกพันของ A และ $\delta_n \in (0, 2a)$ สมมุติให้ลำดับ $\{x_n\}$ ที่สร้างขึ้น สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

4.1.1 $\{\beta_n\} \subset (0,1)$ และ $0 < \liminf_{n\to\infty} \beta_n \le \limsup_{n\to\infty} \beta_n < 1;$

4.1.2 $\{\alpha_n\} \subset (0,1)$ และ $0 < \liminf_{n\to\infty} \alpha_n \le \limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1;$

4.1.3 $\{r_n\} \subset (0, \infty), 0 < \liminf_{n\to\infty} r_n$

4.1.4 $\lim_{n\to\infty} \delta_n = \delta > 0$ และ $\delta < 2a$

แล้วจะได้ว่า ลำดับ $\{x_n\}$ ที่สร้างขึ้นตามสมการ (1) จะลู่เข้าอย่างอ่อนไปสู่ค่า p โดยที่ $p \in \Theta$

พิสูจน์ เนื่องจาก $I - T_{r_n}^{F_2}$ เป็นการส่งทางเดียวแบบเข้มผกผัน สำหรับค่า 1 จะเห็นได้ว่า

$$\| A^*(I - T_{r_n}^{F_2})Ax - A^*(I - T_{r_n}^{F_2})Ay \|^2 \le L\langle x - y, A^*(I - T_{r_n}^{F_2})Ax - A^*(I - T_{r_n}^{F_2})Ay \rangle, \ \ x, y \in H_1$$

จึงสรุปว่า $I - \gamma A^*(I - T_{r_n}^{F_2})A$ เป็นการส่งแบบไม่ขยาย เมื่อ $\gamma \in (0, \frac{1}{L})$

การพิสูจน์ทั้งหมดจะแบ่งเป็น 6 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ต้องการแสดงว่า $\lim_{n\to\infty} \| x_n - q \|$ หาค่าได้

โดยเริ่มพิจารณาค่า $\| u_n - q \|$ และ $\| v_n - q \|$ ดังนี้ สมมุติให้ $q \in \Theta$ แล้ว $q = (I - \gamma A^*(I - T_{r_n}^{F_2})A)q$ จะได้ว่า

$$\| u_n - q \| = \| T_{r_n}^{F_1}(I - \gamma A^*(I - T_{r_n}^{F_2})A)x_n - T_{r_n}^{F_1}(I - \gamma A^*(I - T_{r_n}^{F_2})A)q \| \le \| x_n - q \| \quad (2)$$

เนื่องจาก $q \in VI(C_1, B)$ นั่นคือ $q = P_{C_1}(I - \delta_n B)q$ และ P_{C_1} และ $(I - \delta_n B)$ เป็นการส่งแบบไม่ขยาย จะได้ว่า

$$\| v_n - q \| \le \|(I - \delta_n B)u_n - (I - \delta_n B)q\| \le \|u_n - q\|$$

พิจารณา ค่า $\| w_n - q \|$, $\| y_n - q \|$, $\| z_n - q \|$ และ $\| x_{n+1} - q \|$ ตามลำดับ ดังนี้

$$\| w_n - q \| \le H(Sv_n, Sq) \le \| v_n - q \| \le \| u_n - q \| \le \|x_n - q\| \quad (3)$$

$$\| y_n - q \| \le \alpha_n \| x_n - q \| + (1 - \alpha_n) \| w_n - q \| \le \alpha_n \| x_n - q \| + (1 - \alpha_n) \| x_n - q \| = \|x_n - q\| \quad (4)$$

$$\| z_n - q \| \le H(Sy_n, Sq) \le \| y_n - q \| \le \| x_n - q \| \quad (5)$$

$$\| x_{n+1} - q \| \le \beta_n \| x_n - q \| + (1 - \beta_n) \| z_n - q \| \le \beta_n \| x_n - q \| + (1 - \beta_n) \| x_n - q \| = \| x_n - q \| \quad (6)$$

เนื่องจากอสมการ (6) หมายความว่า $\{\| x_n - q \|\}$ เป็นลำดับลดและมีขอบเขตล่าง จึงสรุปว่า $\lim_{n\to\infty} \| x_n - q \|$ หาค่าได้

ขั้นตอนที่ 2 แสดงว่า $\lim_{n\to\infty} \| u_n - x_n \| = 0$ โดยเริ่มพิจารณาจาก $\| u_n - q \|$ ดังนี้

$$\begin{aligned}
\| u_n - q \|^2 &\le \| x_n - q \|^2 + L\gamma^2 \| Ax_n - T_{r_n}^{F_2} Ax_n \|^2 \\
&\quad + 2\gamma \langle A(q - x_n) + (Ax_n - T_{r_n}^{F_2} Ax_n) - (Ax_n - T_{r_n}^{F_2} Ax_n), Ax_n - T_{r_n}^{F_2} Ax_n \rangle \\
&\le \| x_n - q \|^2 + \gamma(L\gamma - 1) \| Ax_n - T_{r_n}^{F_2} Ax_n \|^2
\end{aligned}$$

แล้วจะได้ว่า

$$\| x_{n+1} - q \|^2 \le \beta_n \| x_n - q \|^2 + (1 - \beta_n) \| z_n - q \|^2 \le \| x_n - q \|^2 + \gamma(L\gamma - 1) \| Ax_n - T_{r_n}^{F_2} Ax_n \|^2$$

ดังนั้นจะได้ว่า $-\gamma(L\gamma - 1) \| Ax_n - T_{r_n}^{F_2} Ax_n \|^2 \le \| x_n - q \|^2 - \| x_{n+1} - q \|^2$

เนื่องจากค่า $\gamma(L\gamma - 1) < 0$ และ $\lim_{n\to\infty} \| x_n - q \|$ หาค่าได้ จึงสรุปได้ว่า $\lim_{n\to\infty} \| Ax_n - T_{r_n}^{F_2} Ax_n \| = 0$ (7)

เนื่องจาก $T_{r_n}^{F_1}$ เป็นการส่งแบบไม่ขยายแบบ firmly และ $I - \gamma A^*(I - T_{r_n}^{F_2})A$ เป็นการส่งแบบไม่ขยายด้วยคือ

$$\begin{aligned}
\| u_n - q \|^2 \le \frac{1}{2}\Big\{ &\| u_n - q \|^2 + \| x_n - q \|^2 - (\| u_n - x_n \|^2 + \gamma^2 \| A^*(I - T_{r_n}^{F_2})Ax_n \|^2 \\
&- 2\gamma \langle u_n - x_n, A^*(I - T_{r_n}^{F_2})Ax_n \rangle) \Big\}
\end{aligned}$$

โดยอสมการ (2) จะได้ว่า

$$\beta_n \| u_n - x_n \|^2 \le \| x_n - q \|^2 - \| x_{n+1} - q \|^2 + 2\gamma\beta_n M \| A^*(I - T_{r_n}^{F_2})Ax_n \|, \ M = \sup\{\|u_n - x_n\| : n \in \mathbb{N}\}$$

เนื่องจากเงื่อนไข 4.1.1, (7), และจากขั้นตอนที่ 1 จึงสรุปว่า $\lim_{n\to\infty} \| u_n - x_n \| = 0$ (8)

ขั้นตอนที่ 3 แสดงว่า ค่าลิมิต $\lim_{n\to\infty} \| v_n - u_n \| = 0$ เนื่องจาก $q \in \Theta$ นั่นคือ $q = P_C(I - \delta_n B)q$ โดยเริ่มพิจารณาค่า $\| v_n - q \|^2$, $\| y_n - q \|^2$ และ $\| x_{n+1} - q \|^2$ ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
\| v_n - q \|^2 &\le \|(I - \delta_n B)u_n - (I - \delta_n B)q\|^2 \\
&\le \|u_n - q\|^2 + (\delta_n^2 - 2\delta_n b)\|Bu_n - Bq\|^2 \\
&\le \|x_n - q\|^2 + (\delta_n^2 - 2\delta_n b)\|Bu_n - Bq\|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\| y_n - q \|^2 &\le \alpha_n \| x_n - q \|^2 + (1 - \alpha_n) \| w_n - q \|^2 \\
&\le \alpha_n \| x_n - q \|^2 + (1 - \alpha_n) \| v_n - q \|^2 \\
&\le \alpha_n \| x_n - q \|^2 + (1 - \alpha_n)\left(\|x_n - q\|^2 + (\delta_n^2 - 2\delta_n b)\|Bu_n - Bq\|^2\right) \\
&= \| x_n - q \|^2 + (1 - \alpha_n)(\delta_n^2 - 2\delta_n b)\|Bu_n - Bq\|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-q\|^2 &\le \beta_n\|x_n-q\|^2+(1-\beta_n)\|z_n-q\|^2\\ &\le \beta_n\|x_n-q\|^2+(1-\beta_n)\|y_n-q\|^2\\ &\le \beta_n\|x_n-q\|^2+(1-\beta_n)\left(\|x_n-q\|^2+(1-\alpha_n)(\delta_n^2-2\delta_n b)\|Bu_n-Bq\|^2\right)\end{aligned}$$

และจะได้ว่า $(1-\beta_n)(1-\alpha_n)\delta_n(2b-\delta_n)\|Bu_n-Bq\|^2 \le \|x_n-q\|^2-\|x_{n+1}-q\|^2$

เนื่องจากเงื่อนไข 4.1.1-4.1.2, 4.1.4 และจากขั้นตอนที่ 1 จึงสรุปว่า $\lim_{n\to\infty}\|Bu_n-Bq\|=0$ (9)

ต่อไป จะพิจารณาค่า $\|v_n-q\|$, $\|y_n-q\|$ และ $\|x_{n+1}-q\|$ เพื่อนำไปสรุปค่าของ $\|u_n-v_n\|$ ดังนี้

$$\begin{aligned}\|v_n-q\|^2 &\le \|P_{C_1}(I-\delta_n B)u_n-P_{C_1}(I-\delta_n B)q\|^2\\ &\le \frac{1}{2}\left\{\|u_n-q\|^2+\|v_n-q\|^2-\|u_n-v_n\|^2-\delta_n^2\|Bu_n-Bq\|^2+2\delta_n\|Bu_n-Bq\|\|u_n-v_n\|\right\}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\|v_n-q\|^2 \le \|x_n-q\|^2-\|u_n-v_n\|^2+2\delta_n\|Bu_n-Bq\|\|u_n-v_n\|$

และ $\|y_n-q\|^2 \le \alpha_n\|x_n-q\|^2+(1-\alpha_n)\|v_n-q\|^2$

$$\le \|x_n-q\|^2-(1-\alpha_n)\|u_n-v_n\|^2+2\delta_n(1-\alpha_n)\|Bu_n-Bq\|\|u_n-v_n\| \quad (10)$$

โดย อสมการ (10) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-q\|^2 &\le \beta_n\|x_n-q\|^2+(1-\beta_n)\|y_n-q\|^2\\ &\le \|x_n-q\|^2-(1-\alpha_n)(1-\beta_n)\|u_n-v_n\|^2+2\delta_n(1-\alpha_n)(1-\beta_n)\|Bu_n-Bq\|\|u_n-v_n\|\end{aligned}$$

ดังนั้น $(1-\alpha_n)(1-\beta_n)\|u_n-v_n\|^2 \le \|x_n-q\|^2-\|x_{n+1}-q\|^2+2\delta_n(1-\alpha_n)(1-\beta_n)\|Bu_n-Bq\|\|u_n-v_n\|$

เนื่องจากเงื่อนไข 4.1.1-4.1.2, 4.1.4, (9) และจากขั้นตอนที่ 1 จึงสรุปว่า $\lim_{n\to\infty}\|u_n-v_n\|=0$ (11)

นอกจากนี้ เนื่องจาก (8),(11) และอสมการ $\|v_n-x_n\|\le\|v_n-u_n\|+\|u_n-x_n\|$ จึงสรุปว่า $\lim_{n\to\infty}\|v_n-x_n\|=0$ (12)

ขั้นตอนที่ 4 แสดงว่าค่า $\lim_{n\to\infty}\|w_n-v_n\|=0$ โดยเริ่มพิจารณา $\|y_n-q\|$, $\|x_{n+1}-q\|$ และบทตั้งที่ 3.2 (3.2.3) ดังนี้

$$\begin{aligned}\|y_n-q\|^2 &\le \alpha_n\|x_n-q\|^2+(1-\alpha_n)\|x_n-q\|^2-(1-\alpha_n)\alpha_n\|x_n-w_n\|^2\\ &= \|x_n-q\|^2-(1-\alpha_n)\alpha_n\|x_n-w_n\|^2\end{aligned}$$

โดยอสมการ (5) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-q\|^2 &\le \beta_n\|x_n-q\|^2+(1-\beta_n)\{\|x_n-q\|^2-(1-\alpha_n)\alpha_n\|x_n-w_n\|^2\}\\ &= \|x_n-q\|^2-(1-\alpha_n)\alpha_n\|x_n-w_n\|^2\end{aligned}$$

นั่นคือ $(1-\alpha_n)\alpha_n\|x_n-w_n\|^2 \le \|x_n-q\|^2-\|x_{n+1}-q\|^2$

และเนื่องจากเงื่อนไข 4.1.2 และ จากขั้นตอนที่ 1 จึงสรุปว่า $\lim_{n\to\infty}\|w_n-x_n\|=0$ (13)

เนื่องจาก (8), (11) และ (12) และอสมการ $\|w_n-v_n\|\le\|w_n-x_n\|+\|x_n-u_n\|+\|u_n-v_n\|$ จึงสรุปว่า

$$\lim_{n\to\infty}\|w_n-v_n\|=0 \quad (14)$$

ขั้นตอนที่ 5 แสดงว่า $\omega_w(x_n)=\{x\in H_1 : x_{n_i}\rightharpoonup x, \{x_{n_i}\}\subset\{x_n\}\}\subset\Theta$ ซึ่งจะแบ่งเป็นขั้นตอนย่อยดังนี้

5.1 ต้องการแสดงว่า $p\in F(S)$ โดยเริ่มจาก $\{x_n\}$ มีขอบเขตและ H_1 เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตแบบสะท้อน จึงได้ว่า $\omega_w(x_n)\neq\varnothing$ สมมุติให้ $p\in\omega_w(x_n)$ แล้วจะมีลำดับย่อย $\{x_{n_i}\}\subset\{x_n\}\rightharpoonup p$ เนื่องจากสมการ (12) แล้วจะได้อีกว่า $\{v_{n_i}\}\subset\{v_n\}\rightharpoonup p$ เมื่อ $i\to\infty$ ดังนั้น โดยบทตั้งที่ 3.6 และ (14) จะได้ว่า $p\in F(S)$

5.2 ต้องการแสดงว่า $p\in VI(C,B)$ โดยเริ่มจากพิจารณา $\|u_n-P_C(I-\delta B)u_n\|$ ดังนี้

เนื่องจาก (11) จะได้ว่า $\|u_n - v_n\| = \|u_n - P_C(I-\delta_n B)u_n\| \to 0$ และ

$$\|u_n - P_C(I-\delta B)u_n\| \le \|u_n - P_C(I-\delta_n B)u_n\| + \|P_C(I-\delta_n B)u_n - P_C(I-\delta B)u_n\|$$
$$\le \|u_n - P_C(I-\delta_n B)u_n\| + |\delta - \delta_n|\|Bu_n\|$$

เพราะว่าเงื่อนไข 4.1.4 จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty}\|u_n - P_C(I-\delta B)u_n\| = 0$ และเนื่องจากบทตั้งที่ 3.7, $x_{n_i} \rightharpoonup p$ และ $\lim_{n\to\infty}\|x_n - u_n\| = 0$ จะได้ว่า $u_n \rightharpoonup p$ ดังนั้น $p = P_C(I-\delta B)p$ จึงสรุปว่า $p \in VI(C,B)$

5.3 ต้องการแสดงว่า $p \in \Omega$ นั่นหมายความว่า ต้องพิสูจน์ $p \in EP(F_1)$ และ $Ap \in EP(F_2)$ โดยเริ่มจากการพิจารณา $u_n = T_{r_n}^{F_1}(I - \gamma A^*(I - T_{r_n}^{F_2})A)x_n$ จะได้ว่า

$$F_1(u_n, y) + \frac{1}{r_n}\langle y-u_n, u_n - x_n\rangle - \frac{1}{r_n}\langle y-u_n, \gamma A^*(I - T_{r_n}^{F_2})A)x_n\rangle \ge 0, \forall y \in C$$

จากสมมุติฐาน 3.2.4 จึงสรุปได้ว่า

$$\frac{1}{r_{n_i}}\langle y-u_{n_i}, u_{n_i} - x_{n_i}\rangle - \frac{1}{r_{n_i}}\langle y-u_{n_i}, \gamma A^*(I - T_{r_{n_i}}^{F_2})A)x_{n_i}\rangle \ge F_1(y, u_{n_i}), \forall y \in C$$

เนื่องจาก (8) จะได้ว่า $u_{n_i} \rightharpoonup p$ และเพราะว่าเงื่อนไข 4.1.2, 3.4.2 และ (7) จึงได้ว่า $F_1(y,p) \le 0, \forall y \in C$
ถ้ากำหนดให้ $y_t = ty + (1-t)p \in C, \forall t \in (0,1], y \in C$ แล้ว จะได้ $F_1(y_t, p) \le 0$
จาก 3.4.1-3.4.4 ดังนั้น $0 = F_1(y_t, y_t) \le tF_1(y_t, y) + (1-t)F_1(y_t, p) + t[F_1(y_t, y)]$ และ $F_1(y_t, y) \ge 0$
เมื่อพิจารณาให้ $t \to 0$ และเนื่องจาก 3.4.4 ซึ่งหมายความคือ $F_1(p, y) \ge 0$ จึงสรุปได้ว่า $p \in EP(F_1)$
เนื่องจาก $Ax_{n_i} \rightharpoonup Ap$ และ (7) จะได้ว่า $T_{r_{n_i}}^{F_2}Ax_{n_i} \rightharpoonup Ap$ เมื่อ $i \to \infty$ จึงนำไปสู่การได้อสมการดังต่อไปนี้

$$F_2(T_{r_{n_i}}^{F_2}Ax_{n_i}, y) + \frac{1}{r_{n_i}}\langle y - T_{r_{n_i}}^{F_2}Ax_{n_i}, T_{r_{n_i}}^{F_2}Ax_{n_i} - Ax_{n_i}\rangle \ge 0, \forall y \in C$$

เนื่องจาก F_2 เป็นการส่งกึ่งต่อเนื่องบนอาร์กิวเมนต์ที่ 1 และ $T_{r_{n_i}}^{F_2}Ax_{n_i} \rightharpoonup Ap$ แล้ว $F_2(Ap, y) \ge 0, \forall y \in C$
ซึ่งหมายความคือ $Ap \in EP(F_2)$ จึงสามารถสรุปได้ว่า $p \in \Omega$ ดังนั้น $p \in \Theta$

ขั้นตอนที่ 6 ต้องการแสดงว่า $\omega_w(x_n)$ มีเพียงจุดเดียวเท่านั้น โดยการพิสูจน์นั้นต้องสมมุติให้ $p, q \in \omega_w(x_n)$ และ $\{x_{n_k}\}, \{x_{n_m}\} \subset \{x_n\}$ ที่ซึ่ง $x_{n_k} \rightharpoonup p$, $x_{n_m} \rightharpoonup q$ เนื่องจาก (12) จะได้ว่า $v_{n_k} \rightharpoonup p$, $v_{n_m} \rightharpoonup q$ ตามลำดับ โดยบทตั้งที่ 3.6 และ (14) จะได้ว่า $p, q \in F(S)$ และเนื่องจากบทตั้งที่ 3.4 จะได้ $p = q$ ซึ่งหมายความว่า ลำดับ $\{x_n\}$ ที่สร้างขึ้นตาม (1) จะลู่เข้าอย่างอ่อนไปสู่ค่า $p \in \omega_w(x_n) \subset \Theta$ โดยที่เซต $\omega_w(x_n)$ มีสมาชิกเพียงค่าเดียวเท่านั้น

4. บทสรุป

ผลงานวิจัยเรื่องนี้ได้สร้างกระบวนการทำซ้ำ เพื่อหาผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพแบบ spilt ปัญหาอสมการการแปรผัน และผลเฉลยของปัญหาจุดตรึงของการส่งหลายค่า ในปริภูมิฮิลเบิร์ต ซึ่งได้แนวคิดจาก ทฤษฎีบทของ Zhao, J., Liang, Y., Liu, Y. Cho, Y.J. (2018), Suantai และคณะ (2016) และ Kazmi และคณะ (2013) แนวทางการทำวิจัยต่อไป คือ จะศึกษาผลเฉลยร่วมของปัญหาดังกล่าวในปริภูมิบานาคต่อไป และ ศึกษาปัญหาอื่นๆ ที่น่าสนใจในปริภูมิฮิลเบิร์ต

5. กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยได้รับสนับสนุนทุนโครงการวิจัยสู่ความเป็นเลิศเพื่อพัฒนาศักยภาพอาจารย์เข้าสู่ตำแหน่งทางวิชาการ ประจำปี 2561 จากสถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยราชภัฏนครปฐม

6. เอกสารอ้างอิง

Banach, S. (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations integrals. **Fund. Math.,** 1922 (3), 133-181.

Blum, E., Oettli, W. (1994). From optimization and variational inequalities to equilibrium problems, **Math. Stud.,** 1994 (63), 123-145.

Censor, Y., Elfving, T., Kopf, N., Bortfeld, T. (2005). The multiple-sets split feasibility problem and its applications for inverse problems. **Inverse Probl**., 2005 (21), 2071-2084.

Combettes, P.L., Hirstoaga, S.A. (2005). Equilibrium programming in Hilbert spaces, **J. Nonlinear Convex Anal**., 2005 (6), 117-136.

Iiduka, H., Takahashi W.(2005). Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and inverse-strongly monotone mappings, **Nonlinear Anal**., 2005(61), 341-350.

Ishikawa, S. (1974). Fixed points by a new iteration method, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 1974 (44), 147-150.

Kazmi, K.R., Rizvi, S.H. (2013). Iterative approximation of a common solution of a split equilibrium problem, a variational inequality problem and a fixed point problem, **J. Egypt. Math. Soc.,** 2013 (21), 44-51.

Mann, WR. (1953). Mean value methods in iteration, **Proc. Am. Math. Soc.,** 1953 (4), 506-510.

Opial, Z. (1967). Weak convergence of the sequence of successive approximation for nonexpansive mappings, **Bull. Am. Math. Soc.**, 1967 (73), 591-597.

Suantai, S. (2005). Weak and strong convergence criteria of Noor iterations for asymptotically nonexpansive mappings, **J. Math. Anal. Appl.**, 2005 (311), 506-517.

Suantai, S., Cholamjiak, P., Cho, Y.J., Cholamjiak, W. (2016). On solving split equilibrium problems and fixed point problems of nonspreading multi-valued mappings in Hilbert spaces. **Fixed Point Theory Appl.**, 2016 (35), 1-16.

Suantai, S., Phuengrattana, W. (2015). Existence and convergence theorems for λ-hybrid mappings in Hilbert spaces. **Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A. Math. Anal.**, 2015 (22), 177-188.

Takahashi, W., Tanaka, T. (2005). Nonlinear Analysis and Convex Analysis (Ed), **Yokohama Publishers**, Yokohama.

Zhao, J., Liang, Y., Liu, Y. Cho, Y.J. (2018), Split equilibrium, Variational inequality and fixed point problems for multi-valued mappings in Hilbert spaces. **Appl. Comput. Math**., 17(3), 271-283