การลู่เข้าของกระบวนการทำซ้ำแบบ Ishikawa เพื่อหาผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพแบบ split และปัญหาจุดตรึงของการส่งแบบหลายค่าในปริภูมิฮิลเบิร์ต

On the convergence of Ishikawa iteration of common solutions for a split equilibrium problem and fixed point problems of multi-valued mappings in Hilbert spaces

ณวิชชา อ่อนใจเอื้อ

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏนครปฐม
nawitcha@hotmail.com

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ ได้เสนอและศึกษากระบวนการทำซ้ำแบบ Ishikawa เพื่อที่จะหาผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพแบบ split และปัญหาจุดตรึงของการส่งหลายค่าดัดแปลงสำหรับค่า λ ในปริภูมิฮิลเบิร์ตจริง และได้ศึกษาการลู่เข้าแบบอ่อนของลำดับที่สร้างจากกระบวนการทำซ้ำแบบ Ishikawa ไปสู่ผลเฉลยร่วมของทั้งสองปัญหาข้างต้น

คำสำคัญ: กระบวนการทำซ้ำแบบ Ishikawa ปัญหาดุลยภาพแบบ split ปัญหาจุดตรึง

Abstract

In this paper, we introduce and study Ishikawa iteration for solving split equilibrium problems and fixed point problems of λ-hybrid multivalued mappings in real Hilbert spaces and prove that the proposed iterative algorithm converges weakly to a common solution of the considered problems

Keywords: Ishikawa iteration, split equilibrium problems, fixed point problems

1. บทนำ

การศึกษาเกี่ยวกับปัญหาดุลยภาพ (Equilibrium Problems) ถือได้ว่าเป็นปัญหาที่สำคัญในด้านเศรษฐศาสตร์ วิทยาศาสตร์ หรือแม้กระทั่งในทางวิศวกรรมศาสตร์ก็ตาม โดยปัญหาดุลยภาพเป็นการศึกษาปัญหา ดังต่อไปนี้ กำหนดให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตจริง กับ inner product $\langle\cdot,\cdot\rangle$ และ induced norm $\|\cdot\|$ กำหนดให้ C เป็นเซตย่อยคอนเวกซ์แบบปิด ที่ไม่เป็นเซตว่าง ของปริภูมิฮิลเบิร์ตจริง และกำหนดให้ การส่ง $F: C\times C\to\mathbb{R}$ เป็นการส่งไบฟังก์ชัน ผลเฉลยของปัญหาดุลยภาพก็คือการหาสมาชิก $x\in C$ ที่สอดคล้องกับอสมการต่อไปนี้

$$F(x,y)\geq 0, \forall y\in C$$

องค์ความรู้ใหม่ที่ได้จาก ปัญหาดังกล่าวนั้นเป็นแบบจำลองพื้นฐาน และเป็นเครื่องมือที่สำคัญในการศึกษาเกี่ยวกับทั้งปัญหาเชิงเส้น และไม่เชิงเส้น (linear and nonlinear problems) อย่างเช่นทางด้าน กลศาสตร์ (mechanics) ฟิสิกส์ (physics) การหาค่าเหมาะที่สุด และการควบคุม (optimization and control) การเงิน (finance) เครือข่าย (network) ทฤษฎีเกมส์ (game theory) เศรษฐศาสตร์และการเคลื่อนย้ายเชิงดุลยภาพ (economics and transportation equilibrium) วิทยาศาสตร์เชิงวิศวกรรมศาสตร์ (engineering science) เป็นต้น (Blum, Oettli, 1994) และ (Combettes, Hirstoaga, 2005)

ในปี 2005 Censor และ Elfving (2005) เป็นนักวิจัยกลุ่มแรกที่ได้ศึกษาปัญหาที่เรียกว่า split feasibility problem (SEP) ในปริภูมิฮิลเบิร์ตที่มีมิติจำกัด โดยกำหนดให้ C และ Q เป็นเซตย่อยคอนเวกซ์แบบปิด ที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต H_1 และ H_2 ตามลำดับ ให้ $A: H_1 \to H_2$ เป็นการส่งเชิงเส้นแบบมีขอบเขต แล้วผลเฉลยของปัญหา split feasibility problem (SEP) คือการหาสมาชิก x^* ที่สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

$$x^* \in C, Ax^* \in Q$$

ผลเฉลยของปัญหา split feasibility problem สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหา เรื่อง intensity-modulated radiation therapy, signal processing และ image reconstruction (Censor et al., 2005)

ต่อมาในปี 2013 Kazmi และคณะ (2013) ได้นำปัญหาดุลยภาพ และ split feasibility problem นำมาประยุกต์รวมกัน กลายเป็นปัญหาที่เรียกว่า ปัญหาดุลยภาพแบบ split (split equilibrium Problem) นั่นคือ: กำหนดให้ $F_1 : C \times C \to \mathbb{R}$ และ $F_2 : Q \times Q \to \mathbb{R}$ เป็นไบฟังก์ชันแบบไม่เชิงเส้น กำหนดให้ $A: H_1 \to H_2$ เป็นการส่งเชิงเส้นที่มีขอบเขต แล้วการหาผลเฉลยปัญหาดุลยภาพแบบ split คือ การหาสมาชิก $x^* \in C$ ที่สอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

$F_1(x^*, x) \geq 0, \forall x \in C$ โดยที่ $y^* = Ax^* \in Q$ และ y^* สอดคล้องกับอสมการ $F_2(y^*, y) \geq 0, \forall y \in Q$

ในงานวิจัยเรื่องนี้จะใช้วิธีการสร้างกระบวนการทำซ้ำของจุดตรึง สำหรับการส่งไม่เชิงเส้น มาประยุกต์ในการหาผลเฉลยของปัญหาดุลยภาพแบบ split ปัจจุบันทฤษฎีจุดตรึง (fixed point theory) นับว่ามีบทบาทสำคัญอย่างมาก ต่อการพัฒนา ความรู้เกี่ยวกับวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีสมัยใหม่และนำไปประยุกต์เพื่อแก้ปัญหาต่าง ๆ เช่น ในทางเศรษฐศาสตร์ก็นำทฤษฎีจุดตรึงไปใช้ในการหาจุดที่ทำกำไรสูงที่สุด หรือเพื่อหาจุดคุ้มทุน

โดยการศึกษาปัญหาจุดตรึงสำหรับการส่งแบบไม่เชิงเส้นเริ่มต้นจาก Banach (1922) โดย กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์ พบว่าการส่งแบบหดตัว (Contraction mapping) จะมีจุดตรึงเพียงจุดเดียว และ สามารถสร้างกระบวนการทำซ้ำ เพื่อหาผลเฉลยของจุดตรึง เรียกว่า กระบวนการทำซ้ำแบบ Picard นิยามโดย

$$x_{n+1} = T(x_n),\ n \geq 1$$

ต่อมาปี 1953 Mann (1953) เสนอกระบวนการทำซ้ำแบบเฉลี่ยค่า ซึ่งสามารถแก้ไขปัญหาการไม่ลู่เข้าของกระบวนการทำซ้ำแบบ Picard ได้ ซึ่งสามารถใช้สมาชิกตัวใดก็ได้ที่อยู่ในโดเมนของการส่งมาเป็นค่าเริ่มต้น ซึ่งปัจจุบันเป็นที่รู้จักกันทั่วไป คือ Mann’s iteration ดังต่อไปนี้ให้ C เซตย่อย คอนเวกซ์แบบปิดที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิ และ $T: C \to C$ ให้ $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subset [0,1]$ และนิยามลำดับ $\{x_n\}$ ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} &x_1 \in C \\ &x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) T x_n, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

ต่อมาในปี 1974 Ishikawa (1974) ได้สร้างกระบวนการทำซ้ำที่เป็นการวางนัยทั่วไปมากกว่าของ Mann (1953) ซึ่งรู้จักกันดีในชื่อว่า Ishikawa’s iteration ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} &x_0 \in C \\ &y_n = \beta_n x_n + (1-\beta_n) T x_n, \\ &x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) T y_n, \quad n \geq 0, \end{aligned}$$

2.วัตถุประสงค์ในการวิจัย

2.1 เพื่อศึกษาการลู่เข้าอย่างอ่อนของลำดับที่สร้างจากกระบวนการทำซ้ำแบบ อิชิกาวาบนปริภูมิฮิลเบิร์ต

2.2 เพื่อหาผลเฉลยร่วมของปัญหาจุดตรึงสำหรับการส่งแบบหลายค่าและปัญหาดุลภาพแบบ split บนปริภูมิฮิลเบิร์ต

3.เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

กำหนดให้ $CB(C)$ เป็นวงศ์ของเซตย่อยมีขอบเขตแบบปิดที่ไม่เป็นเซตว่างของ C และ $K(C)$ เป็นเซตย่อยกระชับที่ไม่เป็นเซตว่างของ C และระยะทางของเฮาส์ดอฟฟ์ (The Hausdorff metric ($\mathcal{H}$))บนเซต $CB(C)$ นิยามโดย

$$\mathcal{H}(A,B) := \max\{\sup_{x\in A} dist(x,B), \sup_{y\in B} dist(y,A)\},\ \forall A,B\in CB(C)$$

กำหนดให้ การส่ง $S:C\to 2^C$ เป็นการส่งหลายค่า จะกล่าวว่า $x\in C$ เป็นจุดตรึงของเซต S ถ้า $x\in Sx$

บทนิยามที่ 3.1 กำหนดให้ $S:C\to 2^C$ เป็นการส่งหลายค่า จะกล่าวว่า S เป็น

(i) การส่งแบบไม่ขยาย ถ้าสอดคล้องกับอสมการต่อไปนี้

$$\mathcal{H}(Sx,Sy) \le \| x-y \|, x,y\in C$$

(ii) การส่งแบบกึ่งไม่ขยาย ถ้าสอดคล้องกับอสมการต่อไปนี้

$$\mathcal{H}(Sx,Sp) \le \| x-p \|, \forall x\in C, \forall p\in F(S)$$

(iii) การส่งแบบ nonspreading ถ้าสอดคล้องกับอสมการต่อไปนี้

$$2\mathcal{H}(Sx,Sy)^2 \le dist(y,Sx)^2 + dist(x,Sy)^2, \forall x,y\in C$$

(iv) การส่งแบบดัดแปลงสำหรับค่า λ (lambda) ถ้ามี $\lambda\in\mathbb{R}$ และสอดคล้องกับอสมการต่อไปนี้

$$(1+\lambda)\mathcal{H}(Sx,Sp)^2 \le (1-\lambda)\| x-y \|^2 + \lambda dist(y,Sx)^2 + \lambda dist(x,Sy)^2, \forall x,y\in C$$

จะเห็นว่า การส่งแบบดัดแปลงสำหรับค่า 0 ก็คือการส่งแบบไม่ขยาย และการส่งแบบดัดแปลงสำหรับค่า 1 คือการส่งแบบ nonspreading เนื่องจากงานวิจัยทำให้ทราบว่าถ้า S เป็นการส่งแบบดัดแปลง สำหรับค่า λ แล้วเซต $F(S)$ เป็นเซตปิด นอกจากนี้ถ้าการส่ง S ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขว่า $Sp=\{p\}, \forall p\in F(S)$ แล้ว $F(S)$ เป็นเซตคอนเวกซ์

บทตั้งที่ 3.2 (Takahashi et al., 2005) กำหนดให้ H_1 เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต แล้วจะมีสมบัติต่อไปนี้

3.2.1 $\| x-y \|^2 \le \| x \|^2 - \| y \|^2 - 2\langle x-y, y\rangle, \forall x,y\in H_1;$

3.2.2 $\| x+y \|^2 \le \| x \|^2 + 2\langle y, x+y\rangle, \forall x,y\in H_1;$

3.2.3 $\| tx+(1-t)y \|^2 = t\| x \|^2 + (1-t)\| y \|^2 - t(1-t)\| x-y \|^2, \forall t\in[0,1]\ \forall x,y\in H_1;$

3.2.4 ถ้าลำดับ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\in H_1$ เป็นลำดับที่ลู่เข้าแบบอ่อน ไปสู่ค่า $z\in H_1$, แล้วจะได้ว่า

$$\limsup_{n\to\infty} \| x_n - y \|^2 = \limsup_{n\to\infty} \| x_n - z \|^2 + \| z-y \|^2, \forall y\in H_1$$

การส่ง $T:C\to H$ เรียกว่าการส่งทางเดียวแบบเข้มผกผันสำหรับค่า δ ถ้ามีจำนวนจริงบวก δ ที่สอดคล้องกับอสมการ

$$\langle x-y, Tx-Ty\rangle \ge \delta\|Tx-Ty\|^2, \forall x,y\in C$$

และสำหรับค่า $\gamma\in(0,2\delta]$ จะเห็นว่าการส่ง $I-\gamma T$ เป็นการส่งแบบไม่ขยายค่าเดียว นั่นคือ

$$\|(I-\gamma T)x-(I-\gamma T)y\| \le \|x-y\|,\ \forall x,y\in C$$

บทตั้งที่ 3.3 (Opial, 1967) ให้ E เป็นปริภูมิบานาค จะกล่าวว่า E สอดคล้องเงื่อนไข opial ถ้าลำดับ $\{x_n\} \subseteq E$ และ $x_n \rightharpoonup x$ แล้ว $\limsup \| x_n - x \| < \limsup \|x_n - y\|,\ y \in E, x \neq y$

บทตั้งที่ 3.4 (Suantai, 2005) ให้ E เป็นปริภูมิบานาคสอดคล้องกับเงื่อนไข Opial และลำดับ $\{x_n\} \subseteq E$ ให้ $u, v \in E,\ \lim_{n\to\infty} \| x_n - u \|$ และ $\lim_{n\to\infty} \| x_n - v \|$ หาค่าได้ ถ้า $\{x_{n_k}\}, \{x_{m_k}\}$ เป็นลำดับย่อยของ $\{x_n\}$ ลู่เข้าอย่างอ่อนสู่ค่า u และ v ตามลำดับ แล้วจะได้ว่า $u = v$

สำหรับการหาผลเฉลยของปัญหาดุลยภาพ จำเป็นต้องตั้งสมมุติฐานโดย ให้ $F_1 : C \times C \to \mathbb{R}$ เป็นไบฟังก์ชันที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

3.4.1 $F_1(x, x) = 0$ สำหรับ $x \in C;$

3.4.2 F_1 เป็นการส่งแบบทางเดียว นั่นคือ $F_1(x, y) + F_1(y, x) \leq 0\ \forall x, y \in C;$

3.4.3 สำหรับ $x, y, z \in C,$ จะได้ว่า $\lim_{t \downarrow 0} F_1(tz + (1-t)x, y) \leq F_1(x, y);$

3.4.4 สำหรับ $x \in C, y \mapsto F_1(x, y)$ เป็นการส่งคอนเวกซ์ และการส่งกึ่งต่อเนื่องล่าง และ

$$F_1(z, y_x)\frac{1}{r}\langle y_x - z, z - x\rangle < 0$$

บทตั้งที่ 3.5 (Suantai et al., 2016) ให้ C เป็นเซตย่อยคอนเวกซ์แบบปิดที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ตจริง H_1 และ $F_1 : C \times C \to \mathbb{R}$ เป็นไบฟังก์ชันสอดคล้องกับเงื่อนไข 3.4.1-3.4.4 สำหรับ $r > 0$ และ $x \in H_1$ จะนิยาม $T_r^{F_1} : H_1 \to C$ โดย $T_r^{F_1}(x) = \left\{ z \in C : F_1(z, y) + \frac{1}{r}\langle y - z, z - x\rangle \geq 0,\ \forall y \in C \right\}, \forall x \in H_1$ จึงสรุปได้ว่า

3.5.1 สำหรับสมาชิก $\forall x \in H_1,\ T_r^{F_1} \neq \varnothing$

3.5.2 $T_r^{F_1}$ ปีนการส่งแบบค่าเดียว

3.5.3 $T_r^{F_1}$ เป็นการส่งไม่ขยายแบบ firmly นั่นคือ $\| T_r^{F_1}x - T_r^{F_1}y \|^2 \leq \langle T_r^{F_1}x - T_r^{F_1}y, x - y\rangle, \forall x, y \in H_1$

3.5.4 $F(T_r^{F_1}) = EP(F_1)$

3.5.5 $EP(F_1)$ เป็นคอนเวกซ์แบบปิด

นอกจากนี้ให้ $F_2 : Q \times Q \to \mathbb{R}$ สอดคล้องกับสมมุติฐานสำหรับ $s > 0$ และ $w \in H_2$ นิยามการส่ง $T_s^{F_2} : H_2 \to Q$ โดย $T_s^{F_2}(v) = \left\{ w \in Q : F(w, d) + \frac{1}{r}\langle d - w, w - v\rangle \geq 0,\ \forall d \in Q \right\}$ จึงสรุปได้ว่า

3.5.6 สำหรับสมาชิก $\forall x \in H_2,\ T_s^{F_2} \neq \varnothing$

3.5.7 $T_s^{F_2}$ ปีนการส่งแบบค่าเดียว

3.5.8 $T_s^{F_2}$ เป็นการส่งไม่ขยายแบบ firmly นั่นคือ $\| T_s^{F_2}x - T_s^{F_2}y \|^2 \leq \langle T_s^{F_2}x - T_s^{F_2}y, x - y\rangle, \forall x, y \in H_2$

3.5.9 $F(T_s^{F_2}) = EP(F_2)$

3.5.10 $EP(F_2)$ เป็นคอนเวกซ์แบบปิด

ข้อสังเกต เงื่อนไข (A) กำหนดให้ปริภูมิฮิลเบิร์ตจริง H และ $C \subset H$ การส่งหลายค่า $S : C \to CB(C)$ จะกล่าวว่า การส่ง S สอดคล้องเงื่อนไข (A) ถ้า $\| x - p \| = d(x, Sp), x \in H$ และ $p \in F(S)$ จะเห็นว่า S สอดคล้องกับเงื่อนไข (A) ก็ต่อเมื่อ $Sp = \{p\}$ สำหรับ $p \in F(S)$ เป็นที่ทราบว่าการดำเนินการที่ประมาณค่าที่ดีที่สุด P_S โดยที่ $P_S x = \{y \in Sx : \| y - x \| = d(x, Sx)\}$ และสอดคล้องกับเงื่อนไข (A)

บทตั้งที่ 3.6 (Suantai et al., 2015) กำหนดให้ C เป็นเซตย่อยคอนเวกซ์แบบปิดที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ตจริง H และ $S : C \to K(C)$ เป็นการส่งหลายค่าดัดแปลงสำหรับค่า λ ถ้าลำดับ $\{x_n\} \subseteq C$ ที่ซึ่ง $x_n \rightharpoonup x$ และ $y_n \in Sx_n$ เมื่อ $x_n - y_n \to 0$ แล้ว $x \in Sx$

4. ผลการวิจัย

ทฤษฎีบทที่ 4.1 กำหนดให้ C และ Q เป็นเซตย่อยคอนเวกซ์แบบปิดที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ตจริง H_1 และ H_2 ตามลำดับ ให้ $A:H_1 \to H_2$ เป็นการส่งเชิงเส้นแบบมีขอบเขต และ $S:C \to K(C)$ เป็นการส่งหลายค่าดัดแปลงสำหรับค่า λ กำหนดให้ $F_1:C\times C \to \mathbb{R}$ และ $F_2:Q\times Q \to \mathbb{R}$ เป็นการส่งแบบไบฟังก์ชันที่สอดคล้องกับสมมุติฐานที่ 3.4.1-3.4.4 และ F_2 เป็นการส่งกึ่งต่อเนื่องบนอาร์กิวเมนต์ที่ 1 สมมุติให้ S สอดคล้องเงื่อนไข (A) และ $\Theta = F(S)\cap\Omega \neq \varnothing$ เมื่อ $\Omega = \{z\in C : z\in EP(F_1), Az\in EP(F_2)\}$ ให้ $x_1 \in C$ และ

$$\begin{aligned} u_n &= T_{r_n}^{F_1}(I-\gamma A^*(I-T_{r_n}^{F_2})A)x_n, \\ y_n &= \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)w_n,\ w_n \in Su_n, \\ x_{n+1} &= \beta_n x_n + (1-\beta_n)z_n,\ z_n\in Sy_n, \forall n\in\mathbb{N} \end{aligned} \tag{1}$$

เมื่อ $\gamma \in (0,1/L)$ ที่ซึ่ง L คือรัศมีสเปกตรัมของ A^*A โดยที่ A^* ผูกพันของ A สมมุติให้ลำดับ $\{x_n\}$ ที่สร้างขึ้นสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

4.1.1 $\{\beta_n\}\subset(0,1)$ และ $0<\liminf_{n\to\infty}\beta_n \le \limsup_{n\to\infty}\beta_n < 1;$

4.1.2 $\{\alpha_n\}\subset(0,1)$ และ $0<\liminf_{n\to\infty}\alpha_n \le \limsup_{n\to\infty}\alpha_n < 1;$

4.1.3 $\{r_n\}\subset(0,\infty), 0<\liminf_{n\to\infty} r_n$

แล้วจะได้ว่า ลำดับ $\{x_n\}$ ที่สร้างขึ้นตามสมการ (1) จะลู่เข้าอย่างอ่อนไปสู่ค่า p โดยที่ $p\in\Theta$

พิสูจน์ ก่อนที่จะเริ่มการพิสูจน์ ต้องแสดงว่า $A^*(I-T_{r_n}^{F_2})A$ เป็นการส่งแบบทางเดียวแบบเข้มผกผันก่อน สำหรับค่า $\dfrac{1}{L}$ เนื่องจาก $T_{r_n}^{F_2}$ เป็นการส่งไม่ขยายแบบ firmly และ $I-T_{r_n}^{F_2}$ เป็นการส่งทางเดียวแบบเข้มผกผัน สำหรับค่า 1 จะเห็นได้ว่า

$$\| A^*(I-T_{r_n}^{F_2})Ax - A^*(I-T_{r_n}^{F_2})Ay\|^2 \le L\langle x-y, A^*(I-T_{r_n}^{F_2})Ax - A^*(I-T_{r_n}^{F_2})Ay\rangle,\ x,y\in H_1$$

แล้วจะได้ว่า $A^*(I-T_{r_n}^{F_2})A$ เป็นการส่งแบบทางเดียวแบบเข้มผกผัน สำหรับค่า $\dfrac{1}{L}$ นอกจากนี้ เมื่อ $\gamma\in(0,\dfrac{1}{L})$ จึงสรุปว่า $I-\gamma A^*(I-T_{r_n}^{F_2})A$ เป็นการส่งแบบไม่ขยายอีกด้วย

การพิสูจน์ทั้งหมดจะแบ่งเป็น 5 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ต้องการแสดงว่า $\lim_{n\to\infty}\| x_n - q\|$ หาค่าได้

สมมุติให้ $q\in\Theta$ แล้ว $q = T_{r_n}^{F_1}q$ และ $q = (I-\gamma A^*(I-T_{r_n}^{F_2})A)q$ ดังนั้น

$$\| u_n - q\| = \| T_{r_n}^{F_1}(I-\gamma A^*(I-T_{r_n}^{F_2})A)x_n - T_{r_n}^{F_1}(I-\gamma A^*(I-T_{r_n}^{F_2})A)q\| \le \| x_n - q\| \tag{2}$$

เนื่องจากสมการ (1) จะพิจารณาระยะทางระหว่าง ลำดับ $\{w_n\}$ และ q ดังนี้

$$\| w_n - q\| \le \operatorname{dist}(w_n, Sq) \le H(Su_n, Sq) \le \| u_n - q\| \le \| x_n - q\| \tag{3}$$

และต่อไปจะพิจารณาระยะทางระหว่าง ลำดับ $\{y_n\}$ กับ q และ ลำดับ $\{z_n\}$ กับ q คือ

$$\| y_n - q\| \le \alpha_n \| x_n - q\| + (1-\alpha_n)\| x_n - q\| = \| x_n - q\|$$

$$\| z_n - q\| \le \operatorname{dist}(z_n, Sq) \le H(Sy_n, Sq) \le \| y_n - q\| \le \| x_n - q\| \tag{4}$$

เนื่องจากสมการ (3) และ (4) จะได้ว่า

$$\| x_{n+1} - q\| \le \beta_n \| x_n - q\| + (1-\beta_n)\| x_n - q\| = \| x_n - q\| \tag{5}$$

เนื่องจากสมการ (5) นั่นคือลำดับ $\{\| x_n - q\|\}$ เป็นลำดับลดและมีขอบเขตล่างจึงสรุปว่า $\lim_{n\to\infty}\| x_n - q\|$ หาค่าได้

ขั้นตอนที่ 2 แสดงว่า ค่าลิมิต $\lim_{n\to\infty}\| w_n - z_n \|=0$

เนื่องจากบทตั้งที่ 3.2 (3.2.3) และอสมการ (3), (4) และการส่ง S สอดคล้องกับเงื่อนไข (A) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\| x_{n+1}-q \|^2 &\le \beta_n \| x_n - q \|^2 + (1-\beta_n)\| z_n - q \|^2 - \beta_n(1-\beta_n)\| w_n - z_n \|^2 \\ &\le \| x_n - q \|^2 - \beta_n(1-\beta_n)\| w_n - z_n \|^2\end{aligned}$$

นั่นคือ $\beta_n(1-\beta_n)\| w_n - z_n \|^2 \le \| x_n - q \|^2 - \| x_{n+1} - q \|^2$

เนื่องจากเงื่อนไข 4.1.1 และ $\lim_{n\to\infty}\| x_n - q \|$ หาค่าได้ จึงสรุปว่า

$$\lim_{n\to\infty}\| w_n - z_n \|=0 \tag{6}$$

ขั้นตอนที่ 3 แสดงว่าค่าลิมิต $\lim_{n\to\infty}\| u_n - x_n \|=0$ และ $\lim_{n\to\infty}\| w_n - u_n \|=0$

การพิสูจน์ในขั้นตอนที่ 3 จะเริ่มพิจารณาจาก

$$\begin{aligned}\| u_n - q \|^2 &\le \| (I-\gamma A^*(I-T_{r_n}^{F_2})A)x_n - q \|^2 \\ &\le \| x_n - q \|^2 + L\gamma^2 \| Ax_n - T_{r_n}^{F_2}Ax_n \|^2 \\ &\quad + 2\gamma\langle A(q-x_n) + (Ax_n - T_{r_n}^{F_2}Ax_n) - (Ax_n - T_{r_n}^{F_2}Ax_n), Ax_n - T_{r_n}^{F_2}Ax_n \rangle \\ &\le \| x_n - q \|^2 + \gamma(L\gamma - 1)\| Ax_n - T_{r_n}^{F_2}Ax_n \|^2\end{aligned}$$

แล้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\| x_{n+1}-q \|^2 &\le \beta_n \| x_n - q \|^2 + (1-\beta_n)\| z_n - q \|^2 \\ &\le \| x_n - q \|^2 + \gamma(L\gamma - 1)\| Ax_n - T_{r_n}^{F_2}Ax_n \|^2\end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้ว่า $-\gamma(L\gamma-1)\| Ax_n - T_{r_n}^{F_2}Ax_n \|^2 \le \| x_n - q \|^2 - \| x_{n+1} - q \|^2$

เนื่องจากค่า $\gamma(L\gamma-1)<0$ และ $\lim_{n\to\infty}\| x_n - q \|$ หาค่าได้จึงแสดงได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}\| Ax_n - T_{r_n}^{F_2}Ax_n \|=0 \tag{7}$$

เนื่องจาก $T_{r_n}^{F_1}$ เป็นการส่งแบบไม่ขยายแบบ firmly และ $I-\gamma A^*(I-T_{r_n}^{F_2})A$ เป็นการส่งแบบไม่ขยายด้วยคือ

$$\begin{aligned}\| u_n - q \|^2 &\le \langle T_{r_n}^{F_1}(I-\gamma A^*(I-T_{r_n}^{F_2})A)x_n - T_{r_n}^{F_1}q, (I-\gamma A^*(I-T_{r_n}^{F_2})A)x_n - q \rangle \\ &\le \frac{1}{2}\Big\{\| u_n - q \|^2 + \| x_n - q \|^2 \\ &\quad -(\| u_n - x_n \|^2 + \gamma^2 \| A^*(I-T_{r_n}^{F_2})Ax_n \|^2 - 2\gamma\langle u_n - x_n, A^*(I-T_{r_n}^{F_2})Ax_n \rangle)\Big\}\end{aligned}$$

แล้วจะได้ว่า

$$\| u_n - q \|^2 \le \| x_n - q \|^2 - \| u_n - x_n \|^2 + 2\gamma \| u_n - x_n \| \ \| A^*(I-T_{r_n}^{F_2})Ax_n \|$$

เนื่องจากอสมการ (3) และ (4) จึงได้

$$\| x_{n+1}-q \|^2 \le \beta_n\{\| x_n - q \|^2 - \| u_n - x_n \|^2 + 2\gamma \| u_n - x_n \| \ \| A^*(I-T_{r_n}^{F_2})Ax_n \|\} \le (1-\beta_n)\| x_n - q \|^2$$

ดังนั้นจะได้ $\beta_n \| u_n - x_n \|^2 \le \| x_n - q \|^2 - \| x_{n+1} - q \|^2 + 2\gamma\beta_n M \| A^*(I-T_{r_n}^{F_2})Ax_n \|$

เมื่อ $M=\sup\{\|u_n - x_n\| : n\in\mathbb{N}\}$ เนื่องจากเงื่อนไข 4.1.1, (7) และ $\lim_{n\to\infty}\| x_n - q \|$ หาค่าได้จึงสรุปว่า

$$\lim_{n\to\infty}\| u_n - x_n \|=0 \tag{8}$$

ต่อไปจะพิสูจน์ $\lim_{n\to\infty}\| w_n - u_n \|=0$ โดยเริ่มพิจารณา

$$\| y_n - q \|^2 \le \alpha_n \| x_n - q \|^2 + (1-\alpha_n) \| x_n - q \|^2 - (1-\alpha_n)\alpha_n \| x_n - w_n \|^2$$
$$= \| x_n - q \|^2 - (1-\alpha_n)\alpha_n \| x_n - w_n \|^2$$

เนื่องจากอสมการ (3) และ (4) จะได้ว่า

$$\| x_{n+1} - q \|^2 \le \beta_n \| x_n - q \|^2 + (1-\beta_n)\{\| x_n - q \|^2 - (1-\alpha_n)\alpha_n \| x_n - w_n \|^2\}$$
$$= \| x_n - q \|^2 - (1-\alpha_n)\alpha_n \| x_n - w_n \|^2$$

นั่นคือ $(1-\alpha_n)\alpha_n \| x_n - w_n \|^2 \le \| x_n - q \|^2 - \| x_{n+1} - q \|^2$

และเนื่องจากเงื่อนไข 4.1.2 และ $\lim_{n\to\infty} \| x_n - q \|$ หาค่าได้จึงได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \| w_n - x_n \| = 0 \quad (9)$$

จากสมการ (8), (9) และพิจารณาจาก $\| w_n - u_n \| \le \| w_n - x_n \| + \| x_n - u_n \|$ จึงสรุปว่า

$$\lim_{n\to\infty} \| w_n - u_n \| = 0 \quad (10)$$

ขั้นตอนที่ 4 แสดงว่า $\omega_w(x_n) = \{x \in H_1 : x_{n_i} \rightharpoonup x, \{x_{n_i}\} \subset \{x_n\}\} \subset \Theta$

เนื่องจากลำดับ $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตและ H_1 เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตแบบสะท้อน จึงได้ว่า $\omega_w(x_n) \neq \varnothing$ สมมุติให้ $p \in \omega_w(x_n)$ แล้วจะมีลำดับย่อย $\{x_{n_i}\} \subset \{x_n\} \rightharpoonup p$ เนื่องจาก (8) แล้วจะได้อีกว่า $\{w_{n_i}\} \subset \{w_n\} \rightharpoonup p$ เมื่อ $i \to \infty$ ดังนั้น โดยบทตั้งที่ 3.6 และ สมการ (10) จะได้ว่า $p \in F(S)$

ขั้นตอนต่อไป ต้องแสดงว่า $p \in EP(F_1)$ เนื่องจาก $u_n = T_{r_n}^{F_1}(I - \gamma A^*(I - T_{r_n}^{F_2})A)x_n$ จะได้

$$F_1(u_n, y) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n \rangle - \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, \gamma A^*(I - T_{r_n}^{F_2})A)x_n \rangle \ge 0, \forall y \in C$$

จากสมมุติฐาน 3.2.4 จึงสรุปว่า

$$\frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n \rangle - \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, \gamma A^*(I - T_{r_n}^{F_2})A)x_n \rangle \ge -F_1(u_n, y) \ge F_1(y, u_n), \forall y \in C$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{r_{n_i}}\langle y - u_{n_i}, u_{n_i} - x_{n_i} \rangle - \frac{1}{r_{n_i}}\langle y - u_{n_i}, \gamma A^*(I - T_{r_{n_i}}^{F_2})A)x_{n_i} \rangle \ge F_1(y, u_{n_i}), \forall y \in C$$

จาก (10) จะได้ว่า $u_{n_i} \rightharpoonup p,$ จากเงื่อนไข 4.1.2, (7) และ 3.4.2 จะได้อสมการว่า $F_1(y, p) \le 0, \forall y \in C$ กำหนดให้ $y_t = ty + (1-t)p, \forall t \in (0,1], y \in C$ จะได้ว่า $y_t \in C$ และ $F_1(y_t, p) \le 0$

จากสมมุติฐาน 3.4.1-3.4.4 ดังนั้น $0 = F_1(y_t, y_t) \le tF_1(y_t, y) + (1-t)F_1(y_t, p) + t\big[F_1(y_t, y)\big]$

จะได้ว่า $F_1(y_t, y) \ge 0, \forall y \in C$ ให้ $t \to 0$ จาก 3.4.4 จะได้ $F_1(p, y) \ge 0$ จึงสรุปว่า $p \in EP(F_1)$ เนื่องจาก A เป็นการส่งเชิงเส้นที่มีขอบเขต และ $Ax_{n_i} \rightharpoonup Ap$ จาก (7) คือ $T_{r_{n_i}}^{F_2} Ax_{n_i} \rightharpoonup Ap$ เมื่อ $i \to \infty$

โดยนิยามของ $T_{r_{n_i}}^{F_2} Ax_{n_i}$ จะได้ $F_2(T_{r_{n_i}}^{F_2} Ax_{n_i}, y) + \frac{1}{r_{n_i}}\langle y - T_{r_{n_i}}^{F_2} Ax_{n_i}, T_{r_{n_i}}^{F_2} Ax_{n_i} - Ax_{n_i} \rangle \ge 0, \forall y \in C$

เนื่องจาก F_2 เป็นการส่งกึ่งต่อเนื่องบนอาร์กิวเมนต์ที่ 1 เพราะว่า $T_{r_{n_i}}^{F_2} Ax_{n_i} \rightharpoonup Ap$ จะได้ว่า $F_2(Ap, y) \ge 0, \forall y \in C$ ซึ่งแสดงว่า $Ap \in EP(F_2)$ จึงสามารถสรุปได้ว่า $p \in \Omega$

ขั้นตอนที่ 5 แสดงว่าลำดับ $\{x_n\}$ และ $\{w_n\}$ ลู่เข้าอย่างอ่อนไปสู่ค่า p โดยที่ $p \in \Theta$

มีเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอที่จะสรุปว่า $\omega_w(x_n)$ มีเพียงจุดเดียวเท่านั้น โดยการพิสูจน์นั้นต้องสมมุติให้ $p,q \in \omega_w(x_n)$ และ $\{x_{n_k}\},\{x_{n_m}\} \subset \{x_n\}$ ที่ซึ่ง $x_{n_k} \rightharpoonup p$, $x_{n_m} \rightharpoonup q$ เนื่องจากสมการ (8) จะได้ว่า $u_{n_k} \rightharpoonup p$, $u_{n_m} \rightharpoonup q$ โดยบทตั้งที่ 3.6 จึงสรุปว่า $p,q \in F(S)$ สุดท้ายนี้เนื่องจากบทตั้งที่ 3.4 จึงสรุปได้ว่า $p = q$

4. บทสรุป

ผลงานวิจัยเรื่องนี้ได้ขยายผลของทฤษฎีบทของ Suantai และคณะ (2016) และ Kazmi และคณะ (2013) โดยจุดประสงค์หลักของงานวิจัยชิ้นนี้ คือการใช้กระบวนการทำซ้ำแบบ Ishikawa เพื่อหาผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพแบบ spilt และผลเฉลยของปัญหาจุดตรึงของการส่งหลายค่าแบบดัดแปลงสำหรับค่า λ ภายใต้เงื่อนไขที่น้อยลง ที่เพียงพอต่อการลู่เข้าอย่างอ่อนของลำดับที่สร้างจาก กระบวนการทำซ้ำแบบ Ishikawa

5. เอกสารอ้างอิง

Banach, S. (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations integrals. **Fund. Math.,** 1922 (3), 133-181.

Blum, E., Oettli, W. (1994). From optimization and variational inequalities to equilibrium problems, **Math. Stud.,** 1994 (63), 123-145.

Censor, Y., Elfving, T., Kopf, N., Bortfeld, T. (2005). The multiple-sets split feasibility problem and its applications for inverse problems. **Inverse Probl**., 2005 (21), 2071-2084.

Combettes, P.L., Hirstoaga, S.A. (2005). Equilibrium programming in Hilbert spaces, **J. Nonlinear Convex Anal**., 2005 (6), 117-136.

Ishikawa, S. (1974). Fixed points by a new iteration method, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 1974 (44), 147-150.

Kazmi, K.R., Rizvi, S.H. (2013). Iterative approximation of a common solution of a split equilibrium problem, a variational inequality problem and a fixed point problem, **J. Egypt. Math. Soc.,** 2013 (21), 44-51.

Mann, WR. (1953). Mean value methods in iteration, **Proc. Am. Math. Soc.,** 1953 (4), 506-510.

Opial, Z. (1967). Weak convergence of the sequence of successive approximation for nonexpansive mappings, **Bull. Am. Math. Soc.**, 1967 (73), 591-597.

Suantai, S. (2005). Weak and strong convergence criteria of Noor iterations for asymptotically nonexpansive mappings, **J. Math. Anal. Appl.**, 2005 (311), 506-517.

Suantai, S., Cholamjiak, P., Cho, Y.J., Cholamjiak, W. (2016). On solving split equilibrium problems and fixed point problems of nonspreading multi-valued mappings in Hilbert spaces. **Fixed Point Theory Appl.**, 2016 (35), 1-16.

Suantai, S., Phuengrattana, W. (2015). Existence and convergence theorems for λ-hybrid mappings in Hilbert spaces. **Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A. Math. Anal.**, 2015 (22), 177-188.

Takahashi, W., Tanaka, T. (2005). Nonlinear Analysis and Convex Analysis (Ed), **Yokohama Publishers**, Yokohama.