สัดส่วนการปลอมปนที่เหมาะสมที่สุดของการแจกแจงแบบปกติปลอมปนชนิดสเกลสำหรับการทดสอบความเป็นปกติ

Optimal Proportion of Contamination based on Scale-Contaminated Normal Distribution for Testing Normality

วันเพ็ญ จันทรังษี

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏนครปฐม
wanpen@webmail.npru.ac.th

บทคัดย่อ

การทดสอบทางสถิติที่มีคุณภาพดีนั้นจะต้องมีอำนาจการทดสอบที่สูงซึ่งอำนาจการทดสอบจะมีค่าสูงหรือไม่ขึ้นอยู่กับค่าพารามิเตอร์ที่กำหนดไว้ในสมมติฐานทางเลือก สำหรับการทดสอบว่าการแจกแจงของตัวอย่างสุ่มมีการแจกแจงแบบปกติหรือไม่ ทำได้โดยการจำลองข้อมูลให้มีการแจกแจงแบบอื่นที่ไม่ใช่การแจกแจงแบบปกติ เช่น การแจกแจงแบบปกติปลอมปนชนิดสเกล ดังนั้น วัตถุประสงค์หลักของการวิจัยนี้ คือ การประมาณค่าสัดส่วนการปลอมปนที่เหมาะสมที่สุดซึ่งทำให้อำนาจการทดสอบมีค่าสูงที่สุดเมื่อตัวอย่างสุ่มมาจากการแจกแจงแบบปกติปลอมปนชนิดสเกล ที่กำหนดสเกลแฟคเตอร์เป็น 3, 4 และ 5 เมื่อขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยนี้เป็น 10, 20, 30, 50, 100, 200 และ 300

คำสำคัญ: อำนาจการทดสอบ การแจกแจงแบบปกติปลอมปนชนิดสเกล พารามิเตอร์ สัดส่วนการปลอมปน สเกลแฟคเตอร์

Abstract

Statistical tests which have good quality have to show superior power of the test. Whether power of the test is high or not will depend on parameters in the alternative hypothesis. For testing whether a random sample is taken from a normal distribution, one can simulate data being other distributions such as scale-contaminated normal distribution. Therefore, the main objective of the research is to estimate optimal proportion of contamination giving highest power of the test when a random sample drawn from a scale-contaminated normal distribution if scale factors are set to be 3, 4 and 5, with sample sizes 10, 20, 30, 50, 100, 200 and 300.

Keywords: power of the test, scale-contaminated normal distribution, parameter, proportion of contamination, scale factor

1. บทนำ

ในทางสถิตินั้น การทดสอบที่มีคุณภาพดี ควรจะให้อำนาจการทดสอบ (power of the test) ที่สูงซึ่งอำนาจการทดสอบจะมีค่าสูงหรือไม่ขึ้นอยู่กับค่าพารามิเตอร์ที่กำหนดไว้ในสมมติฐานทางเลือก (alternative hypothesis) (สุชาดา กีระนันทน์, 2545) การหาอำนาจการทดสอบของตัวสถิติทดสอบนั้นได้มาจาก ความน่าจะเป็นของการปฏิเสธสมมติฐานว่าง (null hypothesis) เมื่อสมมติฐานว่างเป็นเท็จ สำหรับการทดสอบว่าการแจกแจงของตัวอย่างสุ่มมีการแจกแจงแบบปกติหรือไม่ จะให้สมมติฐานว่างคือ H_0 : ตัวอย่างสุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติ ดังนั้น เมื่อกำหนดว่าสมมติฐานว่างต้องเป็นเท็จ จึงจำลองข้อมูลให้มีการแจกแจงแบบอื่นที่ไม่ใช่การแจกแจงแบบปกติ เช่น การแจกแจงแบบปกติปลอมปนชนิดสเกล (scale-contaminated normal distribution)

การแจกแจงแบบปกติปลอมปนชนิดสเกลเป็นลักษณะหนึ่งของการแจกแจงปกติแบบผสม (mixture of normal distributions) เป็นการผสมของการแจกแจงแบบปกติ 2 การแจกแจง คือ $N(\mu,\sigma^2)$ และ $N(\mu,\tau^2)$ มีพารามิเตอร์แสดงตำแหน่ง (location parameter) คือ ค่าเฉลี่ยของประชากร μ เท่ากัน แต่พารามิเตอร์แสดงสเกล (scale parameter) แตกต่างกัน ซึ่งมีรูปแบบการแจกแจงเป็น $(1-p)N(\mu,\sigma^2)+pN(\mu,\tau^2)$ กำหนดให้ p คือ สัดส่วนการปลอมปน (proportion of contamination) และ $0 \le p \le 1$, σ^2 และ τ^2 เป็น ความแปรปรวนของประชากรจาก $N(\mu,\sigma^2)$ และ $N(\mu,\tau^2)$ ตามลำดับ และ $c=\tau/\sigma$ คือ สเกลแฟคเตอร์ (scale factor) โดยมีความแปรปรวนของการแจกแจงแบบปกติปลอมปนชนิดสเกล คือ $(1-p)\sigma^2+p\tau^2$ ลักษณะเช่นนี้ทำให้การแจกแจงของประชากรไม่ชัดเจนว่าเป็นการแจกแจงแบบปกติ รวมทั้งยังไม่สามารถระบุได้แน่ชัดว่าลักษณะการแจกแจงของประชากรเป็นแบบใด ดังนั้น การศึกษาของ Böhning (2002) จึงสนใจหาค่าของ p ที่เหมาะสมที่สุด เมื่อกำหนดค่า c เพื่อให้เกิดอำนาจการทดสอบของตัวสถิติที่สูงสุด โดยไม่เสียนัยทั่วไป (without loss of generality) เมื่อ $\mu=0, \sigma=1$ และ $c=\tau>1$ แล้วจะได้การแจกแจงแบบปกติปลอมปนชนิดสเกลที่พิจารณา คือ $(1-p)N(0,1)+pN(0,c^2)$ มีพารามิเตอร์ที่ต้องพิจารณาเหลือเพียง 2 ค่า คือ p และ c ซึ่งในงานวิจัยชิ้นนี้ จะใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\mathrm{ScConN}(p,c)$

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบ $\mathrm{ScConN}(p,c)$ จะมีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น คือ

$$\phi_{mix}(x)=(1-p)\phi(x)+\frac{p}{c}\phi(\frac{x}{c})$$

ส่วนการแจกแจงปกติที่เหมาะสมที่สุดที่ต้องการ คือ $N(0,(1-p)+pc^2)$ ซึ่งมีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น

$$\phi_{best}(x)=\frac{1}{\sqrt{1-p+pc^2}}\phi\left(\frac{x}{\sqrt{1-p+pc^2}}\right) \quad \text{เมื่อ} \quad \phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

ฟังก์ชันที่ถูกพิจารณา คือ $f(x,p,c)=\sqrt{2\pi}\left|\phi_{mix}(x)-\phi_{best}(x)\right|$ ซึ่งแสดงระยะห่างระหว่าง 2 การแจกแจง ซึ่ง Böhning (2002) ได้พิสูจน์ว่า $f_c(p)=\sup_{-\infty<x<\infty} f(x,p,c)$ เมื่อ $c>1$ จะมีค่าสูงสุด เมื่อ

$$p=\frac{\left(c(c+1)/2\right)^{2/3}-1}{c^2-1} \quad \text{สำหรับ} \quad p\in(0,1) \tag{1}$$

งานวิจัยหลายชิ้น ตัวอย่างเช่น Yap et al. (2011) ทดสอบการแจกแจงแบบปกติของตัวอย่างสุ่มโดยสมมติให้ตัวอย่างสุ่มมาจาก $\mathrm{ScConN}(0.2,3)$ และ $\mathrm{ScConN}(0.05,3)$ ส่วน Gan et al. (1990) สมมติให้ตัวอย่างสุ่มมาจาก $\mathrm{ScConN}(0.05,3)$, $\mathrm{ScConN}(0.05,5)$, $\mathrm{ScConN}(0.05,7)$, $\mathrm{ScConN}(0.1,3)$, $\mathrm{ScConN}(0.1,5)$, $\mathrm{ScConN}(0.1,7)$, $\mathrm{ScConN}(0.2,3)$, $\mathrm{ScConN}(0.2,5)$ และ $\mathrm{ScConN}(0.2,7)$ ในงานวิจัยของ Ramão et al. (2010) ใช้ตัวอย่างสุ่มที่มาจาก $\mathrm{ScConN}(0.05,2)$, $\mathrm{ScConN}(0.1,2)$, $\mathrm{ScConN}(0.2,2)$, $\mathrm{ScConN}(0.05,4)$,

$\mathrm{ScConN}(0.1,4)$ และ $\mathrm{ScConN}(0.2,4)$ จะเห็นว่า การกำหนดค่าสัดส่วนการปลอมปน p เมื่อ $c>1$ สำหรับ $\mathrm{ScConN}(p,c)$ เพื่อให้ได้อำนาจการทดสอบของตัวสถิติทดสอบมีค่าสูงที่สุดผู้วิจัยจะเป็นผู้กำหนด p และ c เองหรืออาจนำค่ามาจากการทบทวนวรรณกรรมในงานวิจัยก่อนหน้า ทำให้ยังไม่สามารถมั่นใจได้ว่าอำนาจการทดสอบของตัวสถิติทดสอบเมื่อตัวอย่างสุ่มมาจากการแจกแจงแบบปกติปลอมปนชนิดสเกลนั้นให้อำนาจการทดสอบที่สูงที่สุดหรือไม่

2. สถิติทดสอบ

ให้ $Y_1 \ldots, Y_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มอย่างง่ายจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ $N(\mu,\sigma^2)$ และ $Y_{[1]} < \ldots < Y_{[n]}$ เป็นสถิติลำดับของ $Y_1 \ldots, Y_n$ รวมทั้ง $\Phi(\cdot)$ คือ ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน ตัวสถิติทดสอบที่ใช้ศึกษาในการวิจัยนี้ ประกอบด้วย คือ

1. ตัวสถิติ Kolmogorov-Smirnov (1933)

$$D = \max_{1\le k\le n}\left| \Phi\left((Y_{[k]}-\bar{Y})/\hat{\sigma}_Y\right) - (k-0.5)/n \right| \quad \text{สำหรับ } k=1,\ldots,n$$

เมื่อ $\bar{Y} = \sum_{k=1}^{n} Y_k / n$ และ $\hat{\sigma}_Y = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(Y_k-\bar{Y}\right)^2 / n}$ เป็นค่าประมาณ (Estimates) ของ μ และ σ ตามลำดับ

2. ตัวสถิติ Michael (1983)

$$D_m = \max_{1\le k\le n}\left| \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\Phi\left((Y_{[k]}-\bar{Y})/\hat{\sigma}_Y\right)} - \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{(k-0.5)/n} \right| \quad \text{สำหรับ } k=1,\ldots,n$$

3. ตัวสถิติ Anderson-Darling (1952)

$$A^2 = -\frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\left\{\ln Z_k + \ln(1-Z_{n-k+1})\right\}\right] - n$$

เมื่อ $Z_k = \Phi\left((Y_{[k]}-\bar{Y})/\hat{\sigma}_Y\right)$ สำหรับ $k=1,\ldots,n$

4. ตัวสถิติ Shapiro-Wilk (1965)

$$W = \frac{\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k Y_{[k]}\right\}^2}{\sum_{k=1}^{n}\left(Y_{[k]}-\bar{Y}\right)^2} \quad \text{สำหรับ } k=1,\ldots,n$$

เมื่อ $(a_{1,\ldots,}a_n)' = t'V^{-1}/(t'V^{-1}V^{-1}t)^{1/2}$, $t' = \left(\mu_1,\ldots,\mu_n\right)$ และ V เป็น เมตริกซ์ความแปรปรวนร่วม (covariance matrix) ของสถิติลำดับ $X_{[1]} \le \ldots \le X_{[n]}$ จากการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน

Yap et al. (2011) เปรียบเทียบการทดสอบการแจกแจงแบบปกติจากตัวสถิติทดสอบ 8 ตัว คือ Shapiro-Wilk, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors, Cramer-von Mises, Anderson-Darling, D'Agostino-Pearson, Jarque-Bera และ Chi-squared ซึ่งสรุปว่า การทดสอบการแจกแจงแบบปกติของ Shapiro-Wilk เป็นตัวสถิติที่ให้อำนาจการทดสอบที่สูงที่สุดจาก 8 การทดสอบข้างต้น และการทดสอบที่มีอำนาจการทดสอบสูงเป็นอันดับที่สองคือ Anderson-Darling เพื่อทดสอบว่าตัวอย่างสุ่มมาจากการแจกแจงแบบปกติหรือไม่ เมื่อให้ตัวอย่างสุ่มมาจาก $\mathrm{ScConN}(p,c)$ โดยมีสเกลแฟคเตอร์ (c) เป็น

3, 4 และ 5, สัดส่วนการปลอมปน (p) เป็น 0.05, 0.1, 0.2 และค่า p ที่เหมาะสมที่สุด ตามค่าในตารางที่ 1 ซึ่งคำนวณจากสมการ (1) เมื่อขนาดตัวอย่าง (n) เป็น 10, 20, 30, 50, 100, 200 และ 300 เพื่อหาอำนาจการทดสอบของตัวสถิติทดสอบ

ตารางที่ 1 สัดส่วนการปลอมปน (p) ที่เหมาะสมที่สุด เมื่อ $c = 3,\ 4, 5$

c	3	4	5
p	0.287741	0.242773	0.211758

เมื่อต้องการหาอำนาจการทดสอบการแจกแจงแบบปกติของตัวสถิติตัวใดตัวหนึ่งข้างต้น ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ให้จำลองตัวอย่างสุ่มขนาด n จำนวน R ชุด จาก $\mathrm{ScConN}(p,c)$ คำนวณค่าสถิติและเปรียบเทียบกับค่าวิกฤตของตัวสถิติทดสอบนั้น แล้วนับจำนวนครั้ง (r) ที่ปฏิเสธสมมติฐานว่าง จะได้ว่าอำนาจของการทดสอบของตัวสถิตินั้น ๆ คือ $\frac{r}{R} \times 100$ ซึ่งในงานวิจัยนี้กำหนดให้ $R = 3,000$ ชุด

ตารางที่ 2 อำนาจการทดสอบของตัวสถิติ D, D_m, A^2 และ W เมื่อตัวอย่างสุ่มมาจาก $\mathrm{ScConN}(p,c)$ สำหรับ $p =$ 0.05, 0.1, 0.2, 0.287741 และ $c = 3$ ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

	n \ p	0.05	0.1	0.2	0.287741
D	10	9.0667	11.3333	15.8667	**16.6667**
	20	13.1333	18.8333	26.5000	**28.2667**
	30	16.8333	24.9333	34.0333	**37.1667**
	50	18.7667	30.9000	48.7000	**53.6333**
	100	25.3333	46.8000	73.0000	**81.3667**
	200	41.0667	72.7667	95.2333	**98.3333**
	300	54.9333	87.9667	99.4333	**99.9333**
D_m	10	10.3333	12.9667	18.2000	**19.0333**
	20	14.9667	21.9000	31.3667	**32.0000**
	30	20.6667	31.5667	42.2000	**43.9667**
	50	26.3667	41.9000	59.1000	**61.9000**
	100	38.1667	61.3667	81.8333	**85.2000**
	200	55.8000	83.9667	97.2667	**98.7667**
	300	70.3333	93.7667	99.5000	**99.9333**
A^2	10	11.4333	15.8000	21.5667	**22.7000**
	20	17.3333	25.5667	36.1000	**38.0667**
	30	21.7333	33.3333	47.2333	**50.9000**
	50	28.9000	46.6667	66.7000	**71.3000**
	100	42.2667	68.6333	89.0333	**94.1667**
	200	62.5333	89.7000	99.1000	**99.9000**
	300	76.7000	96.8333	99.9667	**100**
W	10	11.6333	16.1000	21.2667	**22.1333**
	20	19.1000	28.0000	38.0000	**37.9333**
	30	26.5333	39.6000	51.1333	**51.3667**
	50	37.6000	56.6667	71.1667	**73.0000**
	100	59.8333	80.4000	93.0667	**95.0333**
	200	82.8333	96.6333	99.7333	**99.9667**
	300	92.0333	99.4000	99.9667	**99.9667**

ตารางที่ 3 อำนาจการทดสอบของตัวสถิติ D, D_m, A^2 และ W เมื่อตัวอย่างสุ่มมาจาก $\mathrm{ScConN}(p,c)$ สำหรับ $p=$ 0.05, 0.1, 0.2, 0.242773 และ $c=4$ ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

	n \ p	0.05	0.1	0.2	0.242773
D	10	12.80000	17.7333	25.5667	**27.0000**
	20	20.9333	31.7333	45.7667	**48.3000**
	30	26.9000	42.7667	59.3000	**63.5333**
	50	35.4667	56.3333	78.1333	**82.7333**
	100	52.1667	78.9333	95.7333	**97.9333**
	200	73.7333	96.0667	99.9333	**100**
	300	87.2333	99.4667	100	**100**
D_m	10	14.0667	19.9000	28.6667	**29.9333**
	20	23.2667	36.1667	51.4333	**54.1667**
	30	33.3000	50.3333	66.9667	**70.3667**
	50	43.9333	67.4667	85.5000	**88.1000**
	100	63.1000	87.3000	97.8333	**98.5000**
	200	84.1333	98.3667	99.8667	**100**
	300	93.2000	99.7667	100	**100**
A^2	10	15.8333	23.0667	32.5333	**34.6000**
	20	25.5333	39.6667	56.7000	**59.7333**
	30	34.9000	53.5333	72.2667	**75.4667**
	50	46.0667	70.4333	88.7000	**92.2000**
	100	67.6667	90.1333	99.3000	**98.5000**
	200	88.3667	99.1333	100	**100**
	300	95.8000	99.8667	100	**100**
W	10	16.0000	23.1333	31.7667	**33.5667**
	20	28.1333	42.5667	57.4000	**59.3333**
	30	40.0667	59.1000	74.2667	**75.4000**
	50	54.8000	77.5333	91.4667	**93.6000**
	100	80.3000	94.9000	99.7000	**99.8333**
	200	95.2667	99.8333	100	**100**
	300	98.8333	100	100	**100**

ตารางที่ 4 อำนาจการทดสอบของตัวสถิติ D, D_m, A^2 และ W เมื่อตัวอย่างสุ่มมาจาก $\mathrm{ScConN}(p,c)$ สำหรับ $p=$ 0.05, 0.1, 0.2, 0.211758 และ $c=5$ ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

	n \ p	0.05	0.1	0.2	0.211758
D	10	16.5667	24.4000	35.1000	**35.8333**
	20	27.7000	42.9000	60.8000	**61.6667**
	30	37.8667	56.8333	76.0667	**77.2667**
	50	47.8333	72.8667	91.4667	**92.4667**
	100	69.1667	91.5333	99.6000	**99.8333**
	200	89.3333	99.4000	100	**100**
	300	96.3667	99.4000	100	**100**
D_m	10	18.0000	26.8667	37.6333	**38.4000**
	20	32.0000	48.2333	65.9667	**67.2000**
	30	42.9000	63.7000	82.0667	**83.0667**
	50	56.1667	79.7667	94.9000	**95.8000**
	100	78.4667	95.4000	99.8333	**99.9333**
	200	94.0667	99.8333	100	**100**
	300	98.05333	99.9667	100	**100**
A^2	10	19.9333	29.3000	42.6667	**43.3667**
	20	33.5000	52.1333	71.3000	**72.0000**
	30	44.8333	66.7000	85.9000	**86.5333**
	50	58.4667	82.5667	96.8333	**97.2333**
	100	81.1667	96.5000	99.9333	**99.9667**
	200	95.8667	99.9333	100	**100**
	300	98.9000	100	100	**100**
W	10	20.0000	29.6333	40.6667	**41.3000**
	20	35.8667	54.2000	70.7333	**71.3333**
	30	49.2333	71.0000	87.0000	**87.4333**
	50	65.0333	86.3330	97.3333	**97.7333**
	100	88.0333	98.3000	100	**100**
	200	98.2333	100	100	**100**
	300	99.6000	100	100	**100**

3. อำนาจการทดสอบ

อำนาจการทดสอบของตัวสถิติ D, D_m, A^2 และ W เมื่อตัวอย่างสุ่มมาจาก $\mathrm{ScConN}(p,c)$ สำหรับ $p=$0.05, 0.1, 0.2, 0.287741 และ $c=3$ ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ถูกแสดงดังตารางที่ 2 และเห็นได้ชัดเจนว่าเมื่อ $p=$0.287741 จะให้อำนาจการทดสอบที่สูงกว่า ค่า p อื่น ๆ ในทุกขนาดตัวอย่างและทุกตัวสถิติทดสอบ

อำนาจการทดสอบของตัวสถิติ D, D_m, A^2 และ W เมื่อตัวอย่างสุ่มมาจาก $\mathrm{ScConN}(p,c)$ สำหรับ $p=$0.05, 0.1, 0.2, 0.242773 และ $c=4$ ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ถูกแสดงดังตารางที่ 3 และเห็นได้ชัดเจนว่าเมื่อ $p=$0.242773 จะให้อำนาจการทดสอบของตัวสถิติสูงกว่า ค่า p อื่น ๆ ในทุกขนาดตัวอย่างและทุกตัวสถิติทดสอบ

อำนาจการทดสอบของตัวสถิติ D, D_m, A^2 และ W เมื่อตัวอย่างสุ่มมาจาก $\mathrm{ScConN}(p,c)$ สำหรับ $p=$0.05, 0.1, 0.2, 0.211758 และ $c=5$ ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ถูกแสดงดังตารางที่ 4 และเห็นได้ชัดเจนว่าเมื่อ $p=$0.211758 จะให้อำนาจการทดสอบของตัวสถิติสูงกว่า ค่า p อื่น ๆ ในทุกขนาดตัวอย่างและทุกตัวสถิติทดสอบ

4. สรุปผลและข้อเสนอแนะ

การคำนวณสัดส่วนการปลอมปน $p=\dfrac{\left(c(c+1)/2\right)^{2/3}-1}{c^2-1}$ สำหรับ $p\in(0,1)$ เมื่อ $c>1$ นั้นทำให้เกิดอำนาจการทดสอบที่สูงที่สุดของตัวสถิติ D, D_m, A^2 และ W สำหรับการทดสอบการแจกแจงปกติของตัวอย่างสุ่ม ซึ่งนับว่าเป็นผลการวิจัยที่สามารถอำนวยความสะดวกให้กับนักสถิติเพื่อกำหนดค่าของสัดส่วนการปลอมปนสำหรับตัวอย่างสุ่มที่มาจากการแจกแจงแบบปกติปลอมปนชนิดสเกล ให้ได้อำนาจการทดสอบที่สูงที่สุด เมื่อ $c>1$ โดยที่ไม่จำเป็นต้องสุ่มใช้ค่า p แบบไร้ทิศทาง แต่งานวิจัยนี้ยังมีข้อจำกัดในเรื่องของการใช้สูตรการหา p ซึ่งจะสามารถใช้ได้เฉพาะเมื่อ $c>1$ ดังนั้น งานวิจัยในอนาคตอันใกล้ คือการหาค่า p ที่เหมาะสมที่สุด เมื่อ $0<c<1$ อีกทั้งยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับการทดสอบการแจกแจงของตัวอย่างสุ่มที่มาจากการแจกแจงอื่น ๆ เช่น เอกซ์โปเนนเชียล (exponential) กัมเบล (Gumbel) หรือ ไวบูลล์ (Weibull) เป็นต้น

5. เอกสารอ้างอิง

สุชาดา กีระนันทน์. (2545). **การอนุมานเชิงสถิติ : ทฤษฎีขั้นต้น**. กรุงเทพมหานคร: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Böhning, D., & Ruangroj, R. (2002). A note on the maximum deviation of the scale-contaminated normal to the best normal distribution. **Metrika**, 16, 177-182.

Yap, B.W., & Sim, C.H. (2011). Comparisons of various types of normality tests. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, 81 (12), 2141-2155.

Gan, F.F., & Koehler, K.J. (1990). Goodness-of-fit tests based on P-P probability plots. **Technometrics**, 32 (3), 289-303.

Ramão, X., Delgado, R., & Costa, A. (2010). An empirical power comparison of univariate goodness-of-fit tests for normality. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, 80(5), 545-591.

Kolmogorov, A.N. (1933). Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione. **Giorna. Ist. Attuari**, 4, 83-91.

Michael, J.R. (1983). The stabilized probability plot. **Biometrika**, 70, 11-17.

Anderson, T.W., & Darling, D.A. (1952) Asymptotic theory of certain "goodness-of-fit" criteria based on stochastic processes. **The Annals of Mathematical Statistics**, 23(2), 193-212.

Shapiro, S.S. & Wilk, M.B. (1965). An analysis of variance test for normality (complete samples) **Biometrika**, 52, 591-611